Anexa nr. 9 la Contract nr.21N/2016

Contractor: Institutul Naţional de Cercetare Dezvoltare pentru Fizica Pământului (INCDFP)
Cod fiscal : 5495458
(Anexa la procesul verbal de avizare interna nr.)

De acord,
DIRECTOR GENERAL
Dr. Ing. Constantin Ionescu
Avizat,
DIRECTOR DE PROGRAM
Prof. Gheorghe Marmureanu

RAPORT DE ACTIVITATE AL FAZEI

Contractul nr. 21N/2016
Proiectul: PN 16 35 01 07:Interactia undelor seismice (produse in focarele intermediare vrancene) cu suprafața și cu structurile de la suprafata si efectele lor asupra mediului construit
Faza: 2. Studiul influentei distributiilor de neomogenitati asupra efectelor seismice la suprafata
Termen: 20.03.2017

1. Obiectivul proiectului: Obiectivele principale urmarite sint evaluarea si cuantificarea efectelor seismice cu aplicabilitate la diferite amplasamente, modelarea propagarii undelor seismice prin structuri cu anumite caracteristici, in vederea introducerii lor ca input pentru proiectarea antiseismica.

2. Rezultate preconizate pentru atingerea obiectivului: evaluarea deplasarilor, vitezei și acceleratiei la sol, produse de undele seismice, atit în cazul omogen cit și în cazul structurilor (naturale sau artificiale), aceste date servind ca input în evaluarea riscului seismic. De asemeana isi propune sa gaseasca **care unde elastice vor fi simtite la suprafata pamantului, ce intensitate pot avea ele si ce distrugeri pot produce.**

3. Obiectivul fazei: Studiul efectelor neomogenitatilor în propagarea undelor seismice, în special prin modelarea proprietatilor locale ale mediului și includerea distributiilor de neomogenitati.

4. <u>Rezultate preconizate pentru atingerea obiectivului fazei:</u> Modelarea neomogeneitatilor (naturale sau artificiale) din mediul de propagare a undelor seismice prin modificarea locala a parametrilor mediului, în particular densitatea și constantele elastice. Se considera si se studiaza explicit efectul neomogenitatilor mediului de propagare (care este considerat isotrop) asupra undelor elastice. Estimarea efectului unei neomogenitati de densitate statica, localizata sau extinsa. Se rezolva de asemenea integrale cuplate si se arata ca astfel de neomogenitati pot renorma viteza undelor seismice, sau pot produce unde dispersive, in functie de geometria mediului si de extinderea spatiala a neomogenitatilor.

5. <u>Rezumatul fazei</u>:

1. Introducere.

In cadrul domeniului in care se incadreaza acest proiect s-a incercat si realizat pina acum formularea de modele realiste pentru fenomenele fizice ce se produc in sursele seismice, pentru propagarea undelor seismice si interactia lor cu structurile geologice. Pentru realizarea acestei faze se folosesc informatii si expertize din domeniile mecanicii pamanturilor, materialelor cu structura complexa si comportamentului solurilor la actiuni seismice, studiilor de inginerie seismica, estimarii raspunsului solurilor in conditii de neliniaritate. Rezultatele privind propagarea undelor seismice (elastice) au fost utilizate in evaluarea hazardului seismic, microzonarea seismica, si dezvoltarea unor metode noi de reducere a riscului seismic in zone urbane. Ecuatia undelor constituie punctul central in studiul propagarii undelor seismice. Se porneste de la principiile fundamentale ale elasticitatii in forma lor generala, inclusiv contributii neliniare, si s-a observat ca, in prima aproximatie, termeni anarmonic cubici pot aparea in ecuatia liniara a undelor, conducind astfel la o ecuatie noua, neliniara. S-a reusit sa se gaseasca o solutie a aceastei ecuatii printr-o metoda relativ elementara, ce implica cuadraturi directe, cuadraturi exprimate cu functii speciale (functiile eliptice Jacobi). S-au gasit singularitati puternice in aceasta solutie, a caror semnificatie fizica este, in esenta, ca, dupa un timp suficient de mare de propagare a undelor neliniare, si, in special la granitele domeniului (de exemplu in focar, sau la suprafata de separare a doua medii elastice), mediul in care unda neliniara se propaga este distrus. Asadar, un sol neliniar, in prezenta unui cutremur, poate avea efecte seismice catastrofale. Solutia a fost verificata si prin dezvoltari perturbationale in serii Fourier, cu aceeasi concluzie. Timpii critici si distantele critice, in functie de energia seismului, adica acele durate si distante pe care pot aparea efectele catastrofale, au fost estimate prin parametri fizici. Acestea sunt rezultate care au fost obtinute de echipa care lucreaza la acest proiect si care au fost deja publicate in reviste interne si internationale

Un semi-spatiu, de exemplu, este un mediu finit, cel mai frecvent model in propagarea undelor seismice din interiorul catre suprafata Pamintului. Dificultatile legate de studiul propagarii undelor seismice intr-un astfel de semi-spatiu provin din prezenta suprafetei. Aceasta problema a fost evidentiata de Rayleigh si Lamb inca de la inceputul secolului al 20-lea. Dificultatile se agraveaza in momentul in care ne intereseaza undele (si efectele lor) produse de forte localizate, asa cum sint focarele seismice. Metoda originara a lui Lamb, ce implica impunerea unor conditii la limita generalizate in zona in care fortele sint localizate, este si astazi in uz, fiind cunoscuta ca “problema Lamb” (cf. M. A. Pelissier et al, eds, *Classics of Elastic Waves Theory*, Geoph. Soc., Tulsa, OK (2007)). In lucrarea mea “Elastic waves in a semi-infinite body”, Phys. Lett. **A374** 1601 (2010) am dat solutia exacta si generala a acestei probleme. Solutia consta in separarea partii tip ecuatia undelor in ecuatia de miscare a unui mediu elastic si considerarea fortelor exterioare si a partii separate drept surse pentru ecuatia undelor. In aceste conditii solutia ecuatiei este data de formulele integrale ale lui Kirchhoff (din electromagnetism). Discontinuitatile prezente (precum suprafetele in medii finite) sint incluse in aceste formule ca surse (de exemplu, suprafetele devin surse pentru undele reflectate, refractate, etc). Problema se transforma in ecuatii integrale cuplate, care au fost rezolvate pentru un semi-spatiu cu forte localizate pe suprafata si cu forte localizate in volum. S-a calculat atit deplasarea suprafetei cit si forta ce actioneaza asupra suprafetei in aceste conditii, ca functii de pozitie si timp. Neomogenitatile modifica densitatea mediului, aceasta modificare functionind ca sursa in ecuatia undelor. S-a aratat ca astfel de neomogenitati pot produce schimbarea vitezei de propagare a undelor, sau pot da nastere la unde dispersive. Astfel de schimbari pot fi folosite pentru a deduce prezenta neomogenitatilor in propagarea undelor seismice.

Pe de alta parte au fost efectuate lucrari cu caracter teoretic si experimental care urmaresc asa numitul “efect neliniar in situ” pe linia unei corelari mai strinse intre seismologie in sens traditional si seismologia inginereasca deoarece apare tot mai importanta pe plan economic necesitatea de a cunoaste procesele fizico-mecanice care au loc in vecinatatea structurilor tehnice (diguri mari, baraje, ansamble civile si industriale), mai precis modul de interactiune si raspuns la actiuni seismice majore. Principalul aspect investigat este modul de interactiune dintre structura si sedimentele geologice de suprafata dar si de adincime in conditiile unor solicitari mari (cutremure puternice) care, dupa cum s-a constatat, amplifica efectul dat de comportarea neliniara a rocilor. O importanta orientare a cercetarilor de seismologie neliniara este data de datele observationale care au indicat influenta frecventelor mai ridicate asupra marimii amplificarii undelor seismice in anumite amplasamente, aceste amplificari fiind observate si in cazul unor frecvente mai scazute (0.05-2 Hz) ale semnalului seismic care se propaga prin straturi de sedimente slab consolidate ce prezinta preponderent comportament neliniar la solicitari mecanice (implicit seismice) puternice. Este de remarcat aspectul mai mult observational si instrumental al cercetarilor in domeniul seismologiei neliniare, cercetarile teoretice nefiind in general finalizate pina la un stadiu suficient de satisfacator pentru aplicarea in practica seismologica si a seismologiei ingineresti. Efectele oscilatorii locale produse de miscarile seismice asupra constructiilor de la suprafata Pamantului, sau asupra diverselor elemente de mediu natural sau produs de activitatea umana, sint descrise de teoria generala a factorilor de amplificare seismica locala dezvoltata de colectivul ce propune acest proiect. In varianta acea mai simpla a acestei teorii elementul local de interes se modeleaza cu un oscilator armonic liniar amortizat supus actiunii unei forte periodice externe. Aceasta teorie este extinsa la investigarea regimului de rezonanta, la derivarea simplificata a factorilor de amplificare spectrali pentru deplasare, viteza si acceleratie, si la studiul regimului de socuri, atunci cind forta externa are o durata finita. Prin aceasta dezvoltare teoretica se realizeaza instrumentele necesare pentu o estimare calitativa rapida, cu mijloace semi-analitice a factorilor de amplificare si a efectului lor asupra elementului de interes, si se pot face predictii asupra unor astfel de efecte de amplificare ale miscarilor seismice. Factorii de amplificare ai miscarilor seismice pot servi ca estimari calitative in evaluarea efectelor locale efectelor locale ale seismelor. In primul rind, efectele locale se evalueaza intotdeauna asupra unui element de interes, ca, de exemplu, o constructie, elemente de constructie, portiuni de sol, elemente de mediu natural etc. Apoi, in estimarea factorilor de amplificare un rol imprtant revine parametrului de atenuare (coeficient de disipare), regimului de rezonanta sau de cvasi-rezonanta, si caracteristicilor locale ale elementului de interes, in special proprietatilor neliniare. In acest context, elesticitatea liniara trebuie extinsa la modele visco-elastice, ce permit includerea constitutiva a disiparii, si la modele neliniare. Toate aceste considerente sint deosebit importante in evaluarea efectelor seismice locale. Trebuie subliniat ca pe linga amplificarea locala, miscarea seismica poduce si efecte de amplificare extinse, provenite din propagarea undelor seismice, care au fost studiate in contextul unor modele neliniare de elasticitate, in special in legatura cu efectele importante de directivitate. Amplificarea locala produsa de seismele majore din Vrancea a fost de asemenea studiata recent in functie de magnitudinea acestor seisme si de continutul lor spectral. Factorii de amplificare ai solului afectat de miscarea seismica in functie de frecventa, identificati din prelucrarea seismogramelor, constituie raspunsul spectral al cutremurului. Efectele neliniare locale se manifesta in estimarea factorilor de amplificare, ceea ce conduce la o imagine mai complexa a raspunsului solulul la miscarile seismice. Comportamentul neliniar al solului observat in testele de laborator pe coloane rezonante Hardin-Drnevich la deformari mai mari de 10-5-10-4% este un rezultat de referinta in cercetarile geotehnice. In seismologie neliniaritatea ecuatiilor elasticitatii si raspunsul elastic neliniar devine un subiect tot mai actual, modelul elastic liniar avind o aplicabilitate tot mai limitata. Pentru deplasari mari (si in special pe soluri sedimentare din cuaternar) introducerea efectelor neliniare se considera o necesitate absoluta. In general, efectele neliniare in comportarea solurilor se manifesta, in mod tipic, prin scaderea modulului elastic de forfecare si o cresterea a parametrului de atenuare odata cu cresterea deformatiei tangentiale. Factorii de amplificare scad in cazul prezentei efectelor neliniare, dar exista efecte neliniare extinse, atit in spatiu cit si in timp, legate de propagarea undelor seismice, care accentueaza raspunsul local si mareste riscul seismic. Includerea efectelor neliniare in propagarea undelor seismice se face de obicei cu modelul visco-elastic in care coeficientii constitutivi ai dinamicii sint functii de deformari. Rezultatele matematice ale propagarii undelor in astfel de cazuri, in special cele referitoare la propagarea undelor de suprafata in spatii laminare semi-infinite, prezinta efecte neliniare deosebit de interesante, in sensul amplificarii efectelor locale ca urmare a regimului neliniar.

In seismologie, problemele importante care apar sint de natura dinamica si pentru aceasta se folosesc ecuatiile de miscare in cazul deformarilor infinitezimale. In cazul materialelor cu anisotropii, cind comportamentul pe anumite directii (de deformare) nu mai este elastic, si se foloseste atunci o relatie generalizata tensiuni-deformatii (legea lui Hooke). In cazul pamanturilor, care sint elasto-palstice se poate considera anisotropia transversala, in cazul incarcarii lor tridimensionale. Plecind de la modelele Kelvin-Voigt si Maxwell (Hooke si Newton in serie sau paralel) se pot obtine alte diverse modele de corpuri visco-elastice, asociate pamanturilor (rocilor), care de obicei au o deformatie instantanee la aplicarea brusca a tensiunii. Dar ele nu pot totusi sa modeleze cu precizie material de tipul pamanturilor, pentru ca, de exemplu modelul Kelvin-Voigt un poate modela deformatia reziduala dupa descarcare, iar modelul Maxwell nu are trasaturi ale fluajului. Se poate considera cazul unei solicitari tridimensionale in care apar tensorii tensiunilor si deformarilor cu toate componentele lor in care se considera si amortizarea undelor seismice in masivul de pamant:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + D_{ijkl}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}$$

unde este D_{ijkl} tensorul viscozitate (si C_{ijkl} tensorul coeficientilor elastici).

In cazul solcitarilor puternice pamanturile nu mai au un comportament liniar ci unul neliniar , in care, modulii elastici depind de starea de tensiune sau deformatie.

In general, intr-un mediu anisotropic exista trei unde de volum cu polarizari ortogonale date de directiile propagarii fazei, in respectivul system de simetrie (cubic etc.). Ecuatiile ce determina aceste trei tipuri de unde sint in general complicate iar solutiile lor se prezinta intr-o forma ce ingreuneaza aplicatibilitatea lor. In cazul isotropiei transversale au fost calculate valori numerice, ca si pentru anumie simetrii ale mineralelor. Pe linga p[roblema anisotropiei, discontinuitatile si varisatiile puternice ale vitezelor in structura Pamanatului ridica serioase probleme in folosirea teoriei razei. Dependenta de frecventa a amplitudinilor undelor de volum devine importanta si ca urmare este nevoie de o extindere a teoriei clasice a razelor. In cazul mediiilor heterogene se foloseste aproximatia WKBJ, a carei aplicatibilitate autorul a dezvoltat-o lucrari precedente (Apostol, 1999). Mai mult chiar, pentru tratarea problemelor de strong-motion din seismologia inginereasca si proiectare sint necesare folosirea modelelor crustale bi- si tri-dimensionale. De asemenea solutiile pentru asemenea modele necesita metode numerice. Metodele elementului finit si a diferentelor finite pot fi applicate cu success la calculul undelor de suprafata excitate de structuri geologice complicate. S-au incercat rezolvari pentru probleme referitoare la efectul topografiei sau a structurilor din interiorul pamantului asupra undelor de propagare. In geofizica exploratorie se pune problema detectiei corpurilor neomogene din interior prin studiul variatiei caracteristicilor undelor seismice ce le traverseaza. Capitala Romaniei, orasul Bucuresti, este construit pe depozit sedimentar format din mai multe straturi ce amplifica unde le incidente (de forfecare) provocand distrugeri majore. Astfel prevenirea dezastrelor si reducerea efectelor cutremurelor puternice este o chestiune de maxima importanta pentru locuitorii orasului (Cioflan et al., 2004, Bard et al., 2005).

Amplificarea undelor seismice in depozitele aluvionare poate creste deplasarea la suprafata si marii consecintele cutremurelor puternice asupra structurilor si cladirilor. Asa cum am mai spus mai sus, pentru analizarea acestui efect se pot folosi metode numerice sau investiga in mod direct propagarea undelor seismice (Frankel and Vidale; 1992, Niu and Dravinsky, 2003; Pitilakis et al., 1999; Semblat et al., 2005, Apostol, 2010). De asemenea se pot considera doua tipuri de efecte locale, unul stratigrafic datorat contrastului de viteze dintre straturile considerate, si unul topographic datorat efectelor de concentrare sau imprastiere a undelor seismice. Neomogeneitatile laterale de asemenea sunt o sursa de amplificare majora si contribuie la cresterea duratei miscarii solului (fenomen cunoscut sub numele de efect de bazin sedimentar).

2. Neomogeneitati

Problema propagarii undelor seismice și a efectelor locale produse de aceste unde, reprezinta o arie intens studiata în special în cadrul INCDFP. În acest context, s-au obținut rezultate partiale în privinta includerii conditiilor la limite în ecuația undelor elastice (metoda functiilor generalizate) și a folosirii integralei Kirchhoff ca mijloc de reprezentare a solutiei particulare a ecuatiei undelor elastice. De asemenea, în acelaşi cadru, a fost abordata analiza efectelor produse de neomogenitati în propagarea undelor seismice, luand în considerare modificarea locala a parametrilor mediului și privind aceste modificari ca surse aditionale de unde.

Distributia unor neomogenitati pe suprafața (defecte topografice) poate conduce la efecte locale importante, semnalate în diverse ocazii de studii seismologice. Studiul acestor fenomene se poate face prin includerea variabilitatii proprietatilor locale ale suprafetei, inclusiv variatiile locale de nivel, în ecuatia undelor elastice și tratarea acestor termeni noi ca surse de unde în aceste ecuații. Metode perturbative de studiu au fost dezvoltate pentru astfel de probleme și sint în mod curent în atenția specialistilor.

Rolul volumelor cu proprietati elasto-fizice diferite, a impuritatilor, al defectelor, incluziunilor etc., în medii elastice este de mare importanța în propagarea undelor în aceste medii, intrucit astfel de neomogenitati pot duce la modificarea substantiala a caracteristicilor undelor. Efecte importante ale neomogenitatilor se cunosc în propagarea sunetelor, în vibratiile elementelor de construcție, în propagarea undelor electromagnetice, etc. Metoda curenta de studiu a acestor fenomene implica analiza undelor aditionale, produse de imprastieri multiple, cu rezultate ce pot fi obtinute numai aproximativ. In aceasta etapa se studiaza modelarea imprastierii undelor seismice pe structuri neomogene, inclusiv suprafata semi-spatiului, ca un proces de interactie. Prin aceasta modelare, centrul imprastietor devine o sursa de unde secundare. Elemente ale unui astfel de proces de modelare sunt cunoscute în teoria difractiei undelor electromagnetice. Metoda are meritul de a introduce parametri de model ce pot fi folosiți pentru a reprezenta o mare varietate de centri imprastietori.

Neomogenitatile dintr-un mediu elastic pot modifica propagarea undelor seismice si, in consecinta, pot influenta efectele pe care aceste unde le au asupra suprafetei si asupra structurilor de la suprafata (fie construite, fie naturale). Subliniem importanta deosebita din punct de vedere aplicativ a unei astfel de cercetari. In aceasta etapa, ne vom referi la neomogenitati distribuite in adincime, ia in considerare distributii aleatoare, distributii localizate, precum si o distributie sub forma unui strat de grosime finita. Se poate face extensie la o succesiune de straturi de grosimi diferite si separate aleatoriu, precum si considerarea atit a spatiului infinit cit si semi-spatiului. Rezultatele ce se au in vedere sint complet noi: se poate obtine o renormare a vitezei undelor seismice (lucru investigat experimental, se stie ca viteza undelor seismice variaza cu adincimea; se pot obtine de asemenea unde dispersive, iarasi cunoscute din punct de vedere experimental.

In lucrarea de fata se realizeaza modelarea imprastierii undelor seismice pe structuri neomogene, inclusiv suprafata semi-spatiului, ca un proces de interactie. Prin aceasta modelare, centrul imprastietor devine o sursa de unde secundare. Elemente ale unui astfel de proces de modelare sunt cunoscute în teoria difractiei undelor electromagnetice. Metoda are meritul de a introduce parametri de model ce pot fi folosiți pentru a reprezenta o mare varietate de centri imprastietori. De asemenea se estimeaza efectul unei neomogenitati de densitate statica, localizata sau extinsa. Se rezolva de asemenea integrale cuplate si se arata ca astfel de neomogenitati pot renorma viteza undelor seismice, sau pot produce unde dispersive, in functie de geometria mediului si de extinderea spatiala a neomogenitatilor, acestea fiind elemente ce se pot detecta experimental. Ele sporesc informarea (cunoasterea) noastra privind aspectele practice ale seismelor.

3. Propagarea undelor in medii cu neomogeneitati

Vom analiza modificarile produse in frecventele proprii ale modurilor elastice de catre o neomogeneitate de denstitate statica cu o anumita extindere spatiala, distribuita intr-un spatiu isotrop infinit sau semi-infinit. Undele elastice in solide isotrope sint guvernate de ecuatia de miscare :

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}=\mu\Delta\mathrm{u}+(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{grad}\cdot\boldsymbol{div}\mathrm{u} \qquad (1)$$

in care ρ este densitatea, **u** este deplasarea, λ si μ sint coeficientii Lame. In aceasta ecuatie am considerat ca nu exista forta externa. Scriem ecuatia in forma:

$$\frac{1}{v_t^2}\ddot{\mathbf{u}}-\Delta\mathrm{u}=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{grad}\cdot\boldsymbol{div}\mathrm{u} \qquad (2)$$

unde

$$v_l=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,,\quad v_t=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (3)$$

reprezinta vitezele undelor transversale si longitudinale. Cum este bine stiut, coeficientii Lame pot fi exprimati prin modulul lui Young E si raportul Poisson σ,

$$\lambda=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,,\qquad \mu=\frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad (4)$$

si, din motive de stabilitate, $E>0$ si $-1<\sigma<1/2$ (de fapt, pentru solide obisnuite $0<\sigma<1/2$). In particular, raportul

$$q=\frac{v_l^2}{v_t^2}-1=\frac{\lambda}{\mu}+1=\frac{\sigma}{1-2\sigma} \qquad (5)$$

satisface inegalitatea $q>1/3$ (de fapt $q>1$). Dupa cum se stie, solutia sa este data de potentialul retardat (Kirchhoff)

$$\mathbf{u(R},t\mathbf{)} = \frac{q}{4\pi}\int d\mathbf{R}' \frac{grad\cdot div\mathbf{u}\left(\mathbf{R}',t-\frac{|R-R'|}{v_t}\right)}{|R-R'|} \tag{6}$$

Intr-adevar, folosind transformata Fourier de mai jos

$$\mathbf{u(R},t\mathbf{)} = \sum_{\mathbf{K}}\int d\omega\mathbf{u(K},\omega\mathbf{)}e^{i\mathbf{KR}-i\omega t} \tag{7}$$

si de asemenea bine-cunoascuta integrala

$$\int d\mathbf{R}\frac{1}{R}e^{i\mathbf{KR}+i\omega\frac{R}{v_t}} = -\frac{4\pi v_t^2}{\omega^2-v_t^2K^2} \tag{8}$$

obtinem ecuatia de valori proprii:

$$(-\rho\omega^2+\mu K^2)\overline{\boldsymbol{u}} = -(\lambda+\mu)(\mathbf{K}\overline{\boldsymbol{u}})\mathbf{K} \tag{9}$$

in care ω reprezinta frecventa, **K** vectorul de unda iar $\overline{\boldsymbol{u}}(\mathbf{K},\omega)$ este transformata Fourier a lui $\mathbf{u}(\mathbf{R},t)$. Se poate verifica imediat ca ecuatia (9) da binecunoscutele unde longitudinale si transversale ce se propaga intr-un spatiu infinit isotrop.

Pentru un solid elastic semi-infinit extinzandu-se in regiunea $z>0$, cu o suprafata libera in planul (x, y), z=0, folosim

$$\mathbf{u}\rightarrow\mathbf{u}\theta(z) = (\mathbf{v},u_3)\theta(z) \tag{10}$$

Pentru campul deplasarii, unde **v** este componenta in-plan (paralela cu suprafata) , u_3 este componenta perpendiculara pe suprafata (de-a lungul axei z) a deplasarii si $\theta(z)=0$ pentru $z<0$, $\theta(z)=1$ pentru $z>0$ este functia step. Precizam ca in acest punct al discutiei folosim distributii de fapt (in sensul de functia generalizate) precum $\theta(z)$ si $\delta(z)$ in loc de functii obisnuite. Pentru functia **u** in $\mathbf{u}\theta(z)$ (definita pe intregul spatiu) folosim transformata Fourier de forma

$$\mathbf{u(r},z;t\mathbf{)} = \sum_{\mathbf{k}}\int d\omega\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{(k}\omega;z\mathbf{)}e^{i\mathbf{kr}}e^{-i\omega t} \tag{11}$$

unde $\mathbf{R}=(\mathbf{r},z)$ si $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}\omega;z)$ este transformata Fourier (partiala) a lui $\mathbf{u(r},z;t\mathbf{)}$, in raport cu **r** si t. Divergenta ce apare in ecuatia (6) poate fi scrisa atunci

$$div\mathbf{u} = \left(div\mathbf{v}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\theta(z)+u_3(0)\delta(z)$$

in care se vede aparitia termenului de suprafata $u_3(0)=u_3(z=0)$. Gradientul poate fi calculate in mod similar, folosind transformata Fourier data de ecuatia (11).

Consideram o anumita regiune din spatiu, a carei forma si extensie este descrisa de functia $g(\mathbf{r},z)$, si unde densitatea spatiului este modificata conform

$$\rho \to \rho + \rho g(\mathbf{r}, z) \qquad (12)$$

Vom folosi aceasta ecuatie pentru a descrie neomogeneitatea din spatiu. Se poate vedea usor ca aceasta modificare in densitate introduce un termen de sursa suplimentar in ecuatia (2) care poate fi scrisa

$$-\frac{1}{v_t^2} g(\mathbf{r}, z)\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, z; t) = \sum_{\mathbf{k}} \int d\omega \frac{\boldsymbol{\omega}^2}{\boldsymbol{v}_t^2} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}\omega; z) e^{i\mathbf{kr}} e^{-i\omega t} \qquad (13)$$

in care

$$\widetilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}\omega; z) = \sum_{\mathbf{k}_1} \tilde{g}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, z)\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1\omega; z) \qquad (14)$$

Prin urmare ecuatia (6) devine

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \frac{q}{4\pi} \int d\mathbf{R}' \frac{grad \cdot div\mathbf{u}\left(\mathbf{R}', t - \frac{|R-R'|}{v_t}\right)}{|R-R'|} - \frac{q}{4\pi v_t^2} \int d\mathbf{R}' \frac{g(r', z')\ddot{\mathbf{u}}\left(\mathbf{R}', t - \frac{|R-R'|}{v_t}\right)}{|R-R'|} \qquad (15)$$

Folosind reprezentarea data mai sus si dupa ce se integreaza prin parti de mai multe ori, intr-un mod convenabil, (15) se poate simplifica apreciabil. Integralele ce intervin se calculeaza direct si se reduc la integrala

$$\int_{|z|}^{\infty} dx J_0(k\sqrt{x^2 - z^2}) e^{i\omega x / v_t} = \frac{i}{\kappa_0} e^{i\kappa_0 |z|} \qquad (16)$$

(I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhic, loc.cit),

in care J_0 este functia Bessel de tipul intai si ordin zero, iar

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_t^2} - k^2} \qquad (17)$$

Obtinem sistemul de a ecuatii integrale

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}\omega; z) = -\frac{iq\mathbf{k}}{2\kappa_0} \int_0 dz' \mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}\omega; z') e^{i\kappa_0 |z-z'|} - \frac{q\mathbf{k}}{2\kappa_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0 dz' \widetilde{u_3}(\mathbf{k}\omega; z') e^{i\kappa_0 |z-z'|} +$$

$$+ \frac{i\omega^2}{2v_t^2 \kappa_0} \int_0 dz' \tilde{\mathbf{h}}_{\parallel}(\mathbf{k}\omega; z') e^{i\kappa_0 |z-z'|} \qquad (18)$$

$$\widetilde{\mathbf{u}_3}(\mathbf{k}\omega; z) = -\frac{q}{2\kappa_0} \frac{\partial}{\partial z} \int_0 dz' \mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}\omega; z') e^{i\kappa |z-z'|} + \frac{iq}{2\kappa_0} \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \int_0 dz' \widetilde{u_3}(\mathbf{k}\omega; z') e^{i\kappa |z-z'|} +$$

$$+ \frac{i\omega^2}{2v_t^2 \kappa_0} \int_0 dz' \tilde{\mathbf{h}}_3(\mathbf{k}\omega; z') e^{i\kappa |z-z'|} \qquad (19)$$

in care $\tilde{\mathbf{h}}_{\parallel}$ este componenta in-plan a vectorului $\tilde{\mathbf{h}}$ definit de ecuatia (14) iar $\tilde{h}_3$ este componenta lui in directia *z*. Detaliile pentru derivarea acestor ecuatii sunt date in Appendix.

Este convenabil sa introducem notatiile $\tilde{v}_1 = \mathbf{k}\frac{\tilde{\mathbf{v}}}{k}$, $\tilde{v}_2 = \mathbf{k}_\perp \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{k}$, si cele similare pentru vectorul $\tilde{\mathbf{h}}$, unde $\mathbf{k}_\perp$este un vector perpendicular pe $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\mathbf{k}_\perp$=0, si de aceeasi marime k. In aceste conditii ecuatia (4.18) pentru $\tilde{v}_2$ se reduce la

$$\widetilde{\boldsymbol{v_2}}(\mathbf{k}\omega; z) = \frac{i\omega^2}{2v_t^2\kappa_0}\int_0 \; dz'\tilde{h}_\mathbf{2}(\mathbf{k}\omega; z')e^{i\kappa_0|z-z'|} \quad (20)$$

Aceasta ecuatie corespunde undei transversale polarizata perpendicular pe planul de propagare. Luand derivata a doua in raport cu z in aceasta ecuatie vom avea:

$$\frac{\partial^2\tilde{v}_2}{\partial z^2} = -\kappa_0^2\tilde{v}_2 - \frac{\omega^2}{v_t^2}\tilde{h}_2 \quad (21)$$

In ascest moment trebuie sa notam non-invertibilitatea derivatei (de ordin doi) si a integralei in ecuatia (20) ca urmare a discontinuitatii derivatei functiei $e^{i\kappa_0|z-z'|}$ pentru $z=z'$. In ecuatia (21) facem o transformata Fourier in raport cu coordonata z. Introducand vectorul de unda $\mathbf{K}=(\mathbf{k},\kappa)$ si $\mathbf{K}_1=(\mathbf{k},\kappa_1)$ si folosind ecuatia (17), ecuatia (21) devine:

$$\left(\frac{\omega^2}{v_t^2} - K^2\right)\overline{\boldsymbol{v}}_\mathbf{2}(\mathbf{K}\omega) = -\frac{\omega^2}{v_t^2}\sum_{\mathbf{K_1}}\bar{g}(\mathbf{K}-\mathbf{K_1})\overline{\boldsymbol{v}}_\mathbf{2}(\mathbf{K_1}\omega) \quad (22)$$

Consideram intai ca functia $g(\mathbf{R})$ este constanta, $g(\mathbf{R})$. Atunci $\bar{g}(\mathbf{K}) = g\delta_{\mathbf{K},0}$ si ecuatia (22) dau frecventa

$$\omega = \frac{v_t}{\sqrt{1+g}}K \quad (23)$$

ceea ce este un rezultat asteptat, care arata viteza undei este renormalizata ca o consecinta a modificarii densitatii, asa cum o arata parametrul g. In al doilea rand consideram ca functia $g(\mathbf{R})$ este localizata in pozitia $\mathbf{R}_0$ in mediu intr-un loc ce are extensie spatiala liniara a. Apoi, transformata sa Fourier poate fi luata aproape constanta, $\bar{g}(\mathbf{K}) \cong ga^3/V$, pe distanta ~1/a, unde V este volumul in care se face integrarea Fourier si $g=g(R_0)$. In aceste conditii avem din ecuatia (22) relatia de dispersie:

$$1 = -\frac{\omega^2 g a^3}{v_t^2 V}\sum_{\mathbf{K}}\frac{1}{\frac{\omega^2}{v_t^2}-K^2} \quad (24)$$

Pentru valori mici ale lui g solutiile acestei ecuatii sunt:

$$\frac{\omega^2}{v_t^2} = K^2 - \frac{\omega^2 g}{6\pi^2 v_t^2} = K^2 - \frac{g}{6\pi^2}K^2 + \cdots \quad (25)$$

Astfel ca, intr-o prima aproximare avem o noua renormalizare a vitezei undelor

$$v_t \to v_t(1 - \frac{g}{12\pi^2}) \quad (26)$$

Mai exact, putem lua pentru functia localizata $g(\mathbf{R})$, o distributie normal Gaussiana de forma $(\mathbf{R}) = ge^{-|\mathbf{R}-\mathbf{R}_0|/2a^2}$, centrala la $\mathbf{R}_0$ si cu deviatia standard a. Dupa cum se stie, transformata sa Fourier este $\bar{g}(\mathbf{K}) = \frac{g}{V}(2\pi a^2)^{3/2}e^{-i\mathbf{K}\mathbf{R}_0}e^{-(\frac{K^2a^2}{2})}$, care este, in esenta, o alta distributie Gaussiana, centrata la $\mathbf{K}=0$ si cu deviatia standard $1/a$. In acest caz, termenului de corectie $(g/6\pi^2)K^2$ din ecuatia (25) i se mai adauga un factor aditional $(2\pi^{3/2})$. Subliniem insa ca toate aceste rezultate numerice sunt doar estimari calitative.

Trebuie sa notam faptul ca renormarea data de ecuatia (26) nu depinde de extinderea spatiala a functiei $g(\mathbf{R})$. De asemenea mai trebuie notat ca aceste rezultate sunt aceleasi si pentru un spatiu infinit. Pentru o functia generala $g(\mathbf{R})$ se poate obtine o renormare a valorilor vitezei cuprinse intre cele doua cazuri limita date mai sus de ecuatiile (23) si (26). Dupa cum se vede, exista o asemanare din punct de vedere calitativ intre aceste doua rezultate (de exempu, ecuatia (23) mai poate fi scrisa ca $v_t \rightarrow v_t(1-g/2)$). Dar trebuie, din nou, sa tinem seama ca acestea sunt doar estimari calitative, aproximative. Solutia exacta implica rezolvarea ecuatiei (22) (care este o ecuatie Fredholm omogena de tipul al doilea), care, pentru un kernel general $\bar{g}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_1)$ este o problema dificila. In general aceasta implica gasirea functiile proprii si a valorilor proprii pentru kernel. Sub anumite conditii, se poate incerca o tehnica iterativa, care poate oferi o imagine a comportamentului solutiei din punct de vedere calitativ: relatia de dispersie $\omega(\mathbf{K})$ prezinta atit dispersie cat si anisotropie, si atunci undele vor avea viteze de grup dispersive si anisotropice. In acest caz pot fi privite drept pachete de unde anisotropice si dispersive.

De asemenea este interesant si cazul in care neomogeneitatile localizate sunt distribuite aleator in intregul spatiu, adica functia $g(\mathbf{R})$ este data de

$$g(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N} g_i\,(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{0i}) \qquad (27)$$

unde $g_i(\mathbf{R}-\mathbf{R}_{0i})$ este o functie de marime g_i localizata in volumul a_i^3 centrata la $\mathbf{R}_{0i}$ iar N reprezinta numarul acestor neomogeneitati. Transformata Fourier este atunci data aproximativ de $g_i(\mathbf{K}) \approx g_i a_i^3/V$, si se extinde in volumul $\sim 1/a_i^3$.

Repetand calculele acestea si pentru ecuatia (22) obtinem o renormare a vitezei data de

$$v_t \rightarrow v_t\left(1 - \frac{g}{12\pi^2}\sum_i\ g_i\right) = v_t(1 - \frac{N\bar{g}}{12\pi^2}) \qquad (28)$$

unde $g_i(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{0i})$ este marimea medie. Daca neomogeneitatile sunt distribuite intr-o retea periodica, regulata, atunci problema se complica, din cauza transformatelor Fourier care trebuie facute pentru toti vectorii reciproci ai retelei. Ecuatia integrala (22) este atunci inlocuita cu o alta, tot integrala, ce implica sumare dupa toti vectorii reciproci, dar cu kerneluri similari in toti termenii sumarii. Comportamentul calitativ al solutiilor acetor ecuatii se cunosc din teoria benzilor de energie din solide (sau din propagarea luminii in medii periodice) (L. Brillouin and M. Parodi, *Propagation des Ondes dans les Milieux Periodiqur*, Dunod, Paris, 1956): datorita reflexiilor multiple, undele pot forma unde stationare si frecventele ω pot fi distribuite in benzi, separate prin goluri in frecventa. Dar aceste aspecte duc insa discutia de fata departe de subiectul propus.

De asemenea putem considera un strat de grosime a, adica sa luam $g(\mathbf{R})=g(z-z_0)$, unde $g(z-z_0)$ este o functia localizata in stratul de grosime a in jurul lui z_0. Tranformata sa Fourier este $\overline{g}(\mathbf{k},\kappa)\cong(ga/L)\delta_{k,0}$, unde L este lungimea pe care se face integrala Fourier de-a lungul directiei z si $\overline{g}(\mathbf{k},\kappa)$ extinderea sa de ordinul ~$1/a$ ca functie de κ. Precizam ca functia $g(\mathbf{R})=g(z-z_0)$ nu depinde de $\mathbf{r}$. Desigur, definitia acestei transformate totale Fourier este

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},z;t)=\mathbf{u}(\mathbf{R},t)=\sum_{\mathbf{k}\kappa}\int d\omega\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{k},\kappa;z)e^{i\mathbf{kr}}e^{-i\kappa t}=\sum_{\mathbf{K}}\int d\omega\overline{\mathbf{u}}(\mathbf{K},\omega)e^{i\mathbf{KR}} \qquad (29)$$

unde sumarile (integrarile) dupa $\mathbf{k}$, κ si ω sunt extinse pe intregul spatiu. Atunci viteza este renormata conform relatiei

$$v_t\rightarrow v_t(1-\frac{g}{4\pi}) \qquad (30)$$

Revenind la ecuatia (18) scrisa pentru $\tilde{v}_1$si la ecuatia (19) pentru $\tilde{u}_3$, si lasand argumentele $\mathbf{k}$, ω pentru simplitate, dar pastrand explicit doar argumentul z, se poate vedea ca aceste doua ecuatii implica:

$$\tilde{u}_3(z)=-\frac{i}{k}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial z}-\frac{\omega^2}{2v_t^2\kappa_0k}\frac{\partial\widetilde{H}_1}{\partial z}+\frac{i\omega^2}{2v_t^2\kappa_0}\widetilde{H}_3(z) \qquad (31)$$

unde

$$\widetilde{H}_{1,3}(z)=\int_0 dz'\tilde{h}_{\mathbf{1},\mathbf{3}}(z')e^{i\kappa_0|z-z'|} \qquad (32)$$

Introducand $\tilde{u}_3$ dat de (31) in ecuatia (18) pentru $\tilde{v}_1$si luand a doua derivata din ecuatia rezultanta, obtinem:

$$\frac{\partial^2\tilde{v}_1}{\partial z^2}+\kappa'^2_0\tilde{v}_1=\frac{i\omega^2}{2v_t^2\kappa_0}\left(\frac{\partial^2\widetilde{H}_1}{\partial z^2}+\frac{\kappa_0^2v_t^2}{v_l^2}\widetilde{H}_1\right)+\frac{qk\omega^2}{2v_l^2\kappa_0}\frac{\partial\widetilde{H}_3}{\partial z} \qquad (33)$$

unde

$$\kappa_0' = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_l^2} - k^2} \qquad (34)$$

Introducem transformata Fourier in raport cu coordonata z in ambele ecuatii (31) si (33). Transformata Fourier a functiei $\widetilde{H}_{1,3}(z)$ este

$$\overline{H}_{1,3}(z) = -\frac{2i\kappa_0^2}{\kappa^2-\kappa_0^2}\bar{h}_{1,3}(\kappa) \qquad (35)$$

pentru $\kappa \neq \kappa_0$. Revenind la argumentele initiale, scriem

$$\bar{h}_1(\mathbf{K}) = \sum_{\mathbf{K}_1} \bar{g}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_1)\bar{\boldsymbol{v}}_1(\mathbf{K}_1) \qquad (36)$$

tinand cont si de relatia (14). O expresie similara este valabila si pentru $\bar{h}_3$. In acest fel obtinem doua ecuatii cuplate:

$$\bar{u}_3(\mathbf{K}) - \frac{\kappa}{k}\bar{v}_1(\mathbf{K}) + \frac{\omega^2}{\omega^2 - v_t^2K^2}\sum_{\mathbf{K}_1} \bar{g}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_1)\left[\bar{u}_3(\mathbf{K}_1) - \frac{\kappa}{k}\bar{\boldsymbol{v}}_1(\mathbf{K}_1)\right] = 0 \qquad (37)$$

si

$$(\omega^2 - v_t^2K^2)(\omega^2 - v_l^2K^2)\bar{v}_1(\mathbf{K}) + \omega^2(\omega^2 - v_l^2\kappa^2 - v_t^2k^2)\sum_{\mathbf{K}_1} \bar{g}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_1)\bar{\boldsymbol{v}}_1(\mathbf{K}_1) + q v_t^2\kappa k\omega^2 \sum_{\mathbf{K}_1} \bar{g}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_1)\,\bar{u}_3(\mathbf{K}_1) = 0 \qquad (38)$$

Analizam aceste ecuatii in acelasi mod cum am facut-o mai inainte. Pentru o functie constanta $g(\mathbf{R})=g$, a carei transformata Fourier este $\bar{g}(\mathbf{K}) = g\delta_{\mathbf{K},0}$, ecuatiile (37) si (38) dau doua tipuri de unde. Pentru undele longitudinale, $\bar{u}_3 = \frac{\kappa\bar{v}_1}{k}$, ecuatia (37) este satisfacuta identic, in timp ce din ecuatia (38) obtinem o renormare a vitezei v_l, care este aceeasi cu cea data mai sus de ecuatia (23). Pentru undele transversale $\bar{u}_3 = -\frac{k\bar{v}_1}{\kappa}$ (unde p, a caror polarizare este in planul de propagare) obtinem din ecuatiile (37) si (38) aceeasi renormare a vitezei v_t ca si cea data de ecuatia (23).

Consideram acum ca functia $g(\mathbf{R})$ este localizata intr-o pozitie oarecare $\mathbf{R}_0$ in interiorul spatiului si de o extindere de ordinul $\sim a$. Transformata sa Fourier poate fi luata ca $\bar{g}(\mathbf{K}) \cong ga^3/V$ pentru $\mathbf{K}$ extinzandu-se pe $\sim 1/a$ iar $g=g(R_O)$. Este usor de observat ca, potrivit ecuatiilor (37) si (38), viteza v_t nu este renormata in ordinul intai al parametrului (mic) g, dar viteza v_l este renormata conform:

$$v_l \to v_l\left(1 - \frac{g}{36\pi^2}\right) \qquad (39)$$

In mod similar, pentru un strat de grosime a viteza v_t nu este renormata in primul ordin de marime al parametrului g, dar frecventa undelor longitudinale devine:

$$\omega = v_l K(1 - \frac{gak}{4}) \quad (40)$$

si se poate observa ca undele longitudinale devin dispersive in acest caz.

Pentru comparative dam aici rezultatele pentru o densitate de neomogeneitati intr-un spatiu elastic infinit. Folosind transformatele Fourier, ecuatia (15) duce la:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{K}\omega) = \frac{qv_t^2}{\omega^2 - v_t^2 K^2}(\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}})\mathbf{K} - \frac{\omega^2}{\omega^2 - v_t^2 K^2}\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{K}\omega) \quad (41)$$

unde

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{K}\omega) = \sum_{\mathbf{k_1}} \bar{g}(\mathbf{K} - \mathbf{K_1})\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{K_1}\boldsymbol{\omega}) \quad (42)$$

si in care am folosit integrala data de ecuatia (8). Ecuatia (41) se reduce la

$$\bar{u}_{1,2}(\mathbf{K}\omega) + \frac{\omega^2}{\omega^2 - v_{l,t}^2 K^2}\sum_{\mathbf{K_1}} \bar{g}(\mathbf{K} - \mathbf{K_1})\bar{u}_{1,2}(\mathbf{K_1}\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (43)$$

pentru undele longitudinale $\bar{u}_1 = \bar{\boldsymbol{u}}\mathbf{K}/K$ (cu viteza v_l) si, respectiv, pentru undele transversale $\tilde{v}_2 = \bar{u}_2 = \bar{\boldsymbol{u}}\mathbf{K}_\perp/K$ (de viteza v_t), unde $\mathbf{K}_\perp$ este un vector perpendicular pe vectorul de unda **K,** $\mathbf{K}\mathbf{K}_\perp = 0$ si de aceeasi marime K. Ambele ecuatii (43) duc la o ecuatie de dispersie de aceeasi forma ca si cea care corespunde undelor *s* (ecuatia (22)). Pentru o neomogeneitate extinsa, ambele viteze $v_{t,l}$ sunt renormate conforma ecuatiei (23), iar pentru o neomogeneitate localizata ambele renormate conform ecuatiei (26). Aceasta este diferenta fata de semi-spatiul infinit, prin comparatie cu ecuatia (39).

Appendix. Derivarea ecuatiilor (18) si (19).

Consideram ca notam cu

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, z; t) = -\frac{q}{4\pi v_t^2}\int d\mathbf{R}' \frac{g(r', z')\ddot{\mathbf{u}}\left(\mathbf{R}', t - \frac{|R-R'|}{v_t}\right)}{|R-R'|} \quad (44)$$

al doilea termen din membrul drept al ecuatiei (15), unde **R**=(**r**, *z*) si **R'**=(**r'**, *z'*). Trebuie sa precizam ca aici integrarea se face pe intregul spatiu (conform definitiei potentialelor Kirchhoff). Intai inlocuim pe **u** cu **u**$\theta(z)$ ceea ce va restrictiona integrarea in raport cu z' la 0<z'<∞. In al doilea rand vom efectua transformarea Fourier in raport cu timpul conform ecuatiei (11), ceea ce va adauga un factor $-\omega^2$. Apoi introducem transformatele Fourier spatiale (conform cu aceeasi ecuatie (11) si obtinem:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r},z;t) = \frac{\omega^2}{4\pi v_t^2}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\int_0^\infty dz'\int d\mathbf{r}'\,\frac{\tilde{g}(\mathbf{k}_2,z')\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1\omega;z')}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+(z-z')^2}}\times e^{i\omega/v_t\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+(z-z')^2}}e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{r}'}$$

(45)

In aceasta ecuatie vom introduce o noua variabila $\mathbf{r}_1$=$\mathbf{r}'$-$\mathbf{r}$ si luam $\mathbf{k}_1$+$\mathbf{k}_2$=$\mathbf{k}$. Obtinem astfel transformata Fourier:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}\omega;z) = \frac{\omega^2}{4\pi v_t^2}\sum_{\mathbf{k}_1}\int_0^\infty dz'\int d\mathbf{r}'\,\frac{\tilde{g}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,z')\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1\omega;z')}{\sqrt{r_1^2+(z-z')^2}}\times e^{i\omega/v_t\sqrt{r_1^2+(z-z')^2}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} \quad (46)$$

Apoi, prin integrari successive, vom obtine

$$\int d\mathbf{r}_1\,\frac{e^{\frac{i\omega}{v_t}\sqrt{r_1^2+z^2}}}{\sqrt{r_1^2+z^2}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} = 2\pi\int_0^\infty dr_1\,r_1\,\frac{e^{\frac{i\omega}{v_t}\sqrt{r_1^2+z^2}}}{\sqrt{r_1^2+z^2}}J_0(kr_1) =$$

$$= 2\pi\int_{|z|}^\infty dx\,J_0\left(k\sqrt{x^2-z^2}\right)e^{i\frac{\omega}{v_t}x} = \frac{2\pi i}{\kappa_0}e^{i\kappa_0|z|} \quad (47)$$

conform ecuatiei (16), in care $\kappa_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_t^2}-k^2}$ (din ecuatia (17)). In relatia (47) J_0 este functia Bessel de primul tip si oridn zero, si vom face schimbarea de variabila $r_1^2+z^2=x^2$. Acest rezultat va fi folosit in toate calculele ce vor urma. Inlocuim acum integrala in raport cu $\mathbf{r}_1$ din ecuatia (46) cu acest rezultat si vom obtine:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}\omega;z) = \frac{i\omega^2}{2v_t^2\kappa_0}\sum_{\mathbf{k}_1}\int_0^\infty dz'\,\tilde{g}(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,z')\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_1\omega;z')e^{i\kappa_0|z-z'|} \quad (48)$$

sau

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}\omega;z) = \frac{i\omega^2}{2v_t^2\kappa_0}\int_0^\infty dz'\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}\omega;z')e^{i\kappa_0|z-z'|} \quad (49)$$

conform definitiei (14). Se poate recunoaste de-acum ultimul termen din membrul drept al ecuatiilor (18) si (19).

In continuare abordam si primul termen din membrul drept al ecuatiei (15). Intai inlocuim $\mathbf{u}$ cu $\mathbf{u}\theta(z)$, In al doilea rand trebuie sa observam ca acest termen este calculat pentru $\mathbf{u}(\mathbf{R}'$, $t')$, in care timpul t' este inlocuit cu timpul retardat $t-|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|/v_t$ (conform definitiei potentialelor retardate Kirchhoff). Folosind ecuatiile (11) si (12), si introducand transformata Fourier in raport cu $\mathbf{r}$, obtinem:

$$div\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}}\left[\left(i\mathbf{k}\mathbf{v}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\theta(z)+u_3(0)\delta(z)\right]e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (50)$$

si

$$(grad\cdot div\mathbf{u})_{\parallel} = \sum_{\mathbf{k}}\left[i\mathbf{k}\left(i\mathbf{k}\mathbf{v}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\theta(z)+i\mathbf{k}u_3(0)\delta(z)\right]e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (51)$$

pentru componenta in-plan a gradientului si

$$(grad \cdot div\mathbf{u})_3 = \sum_{\mathbf{k}} \left[\left(ik\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right)\theta(z) + \left(i\mathbf{kv} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\delta(z)\right] e^{i\mathbf{kr}} + \\ + \sum_{\mathbf{k}} u_3(0)\delta'(z) e^{i\mathbf{kr}} \qquad (52)$$

pentru componenta sa normala la suprafata. Simbolul $\delta'(z)$ reprezinta aici derivata functiei δ in raport cu coordonata z. Folosind transformata Fourier in raport cu timpul, contributia componentei in-plan a gradientului (ecuatia (50)) la ecuatia (15) devine:

$$\frac{q}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^\infty dz' \int d\mathbf{r}' \frac{i\mathbf{k}\left(i\mathbf{kv} + \frac{\partial u_3}{\partial z'}\right)}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 + (z-z')^2}} e^{i\frac{\omega}{v_t}v_t\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+(z-z')^2}} e^{i\mathbf{kr}'} + \\ + \frac{q}{4\pi}\sum_{\mathbf{k}}\int d\mathbf{r}' \frac{i\mathbf{k}u_3(0)}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+z^2}} e^{i\frac{\omega}{v_t}v_t\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2+z^2}} e^{i\mathbf{kr}'} \qquad (53)$$

Acum introducem iar variabila $\mathbf{r}_1$=**r’**-**r** si folosim rezultatul dat de ecuatia (47). Putem scrie prin urmare transformata Fourier a lui **v** dat de ecuatia (15) (incluzand si contributiile date de ecuatia (49)) in forma:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}\omega; z) = -\frac{iq\mathbf{k}}{2\kappa_0}\int_0^\infty dz'\, \mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}} e^{i\kappa_0|z-z'|} - \frac{q\mathbf{k}}{2\kappa_0}\int_0^\infty dz' \frac{\partial \widetilde{u_3}}{\partial z'} e^{i\kappa_0|z-z'|} - \\ - \frac{q\mathbf{k}}{2\kappa_0}\widetilde{u_3}(0) e^{i\kappa_0 z} + \tilde{\mathbf{F}}_{\parallel}\big((\mathbf{k}\omega; z)\big) \qquad (54)$$

In cea de-a doua integrala din aceasta ecuatie efectuam integrarea prin parti si trecem de la $\partial/\partial z'$ la $-\partial/\partial z$ in derivatele functiei $e^{i\kappa_0|z-z'|}$. Vom obtine imediat ecuatia (18) din prezentarea de mai sus.

Componenta gradientului normala la suprafata (ecuatia (51)) este tratata in acelasi fel. Se introduce transformata Fourier in raport cu timpul, apoi folosind ecuatia (47) pentru integrarea dupa **r**’ se obtine transformata Fourier partiala a lui u_3. In continuare, se efectueaza o integrare prin parti in prima paranteza din ecuatia (51) care anuleaza contributia celei de-a doua paranteze din aceasta ecuatie. In final se face o alta integrare prin parti pentru termenul ce contine $\partial\tilde{u}_3/\partial z'$ care anuleaza contributia termenului δ’. Dam mai jos contributia acestui termen δ’, care necesita calcule mai elaborate. Obtinem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\delta'(z) e^{i\kappa_0|z-z'|} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\delta'(z)\frac{\partial}{\partial z'} e^{i\kappa_0|z-z'|} = \\ = \frac{\partial}{\partial z'}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\delta'(z) e^{i\kappa_0|z-z'|} = i\kappa_0 e^{i\kappa_0 z} \qquad (55)$$

Prin aceasta relatie se incheie calculul ecuatiilor (18) si (19) prezentate in text.

Bibliografie:

Apostol, B. F., *A new derivation of the WKB approximation*, Rom. Journ. of Phys., **44**, 505, 1999.

Apostol, B. F., *The effect of the inhomogeneities on the propagation of the elastic waves in isotropic bodies*, Mechanics Research Communications, 37, 458–462, 2010.

Bard, P.-Y., J.-L. Chazelas, P. Guéguen, M. Kham, J.-F. Semblat, *Assessing and managing earthquake risk – Chap.5: Site-city interaction,* C.S.Oliveira, A.Roca and X. Goula Eds, Springer, 530 p, 2005.

Cioflan, C., Apostol, B. F., Moldoveanu, C. .L., Panza, G. F., Marmureanu, Gh., *Deterministic Approach for the Seismic Microzonation of Bucharest,* PAGEOPH, 161, **5-6**, 1149-1164, March 2004, special issue: Seismic Ground Motion in Large Urban Areas; Main results of the UNESCO-IUGS-IGCP Project; Editors: Panza, Nunziata, Paskaleva; Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, ISSN 0033-4553, 2004.

Niu, Y and Dravinski, M., *Direct 3D BEM for scattering of elastic waves in a homogenous anisotropic half-space*, Wave Motion, **38**, 165–175, 2003.

Pitilakis, K.D., Raptakis, D.G., Makra, K.A., *Site effects : recent considerations and design provisions*, 2nd Int. Conf. on Earthquake Geotechnical Eng., Lisbon, Balkema ed., 901-912, 1999.

Semblat J.F., Kham M., Parara E., Bard P.Y., Pitilakis K., Makra K., Raptakis D., *Site effects : basin geometry vs soil layering,* Soil Dynamics and Earthquake Eng., **25**, no. 7-10, 529-538, 2005.

6. Rezultate, stadiul realizării obiectivului fazei, concluzii şi propuneri pentru continuarea proiectului (se vor preciza stadiul de implementare a proiectului, gradul de indeplinire a obiectivului cu referire la tintele stabilite si indicatorii asociati pentru monitorizare si evaluare).

Prin rezultatele prezentate consideram ca **obiectivele fazei au fot indeplinite in totalitate** si ca **tintele stabilite au fost atinse iar proiectul a atins gradul de implementare scontat** pentru etapa intai.

Prin urmarirea atingerii scopului sau, acest proiect isi propune sa ofere date si proceduri in ceea ce priveste evaluarea riscului pre-existent si reducerea sa, la cutremurele produse de surse seismice, atit superficiale cat si intermediare, sa dezvolte tehnici potrivite privind implementarea raspunsului efectiv la dezastre. Modelarea imprastierii undelor seismice pe structuri neomogene, inclusiv suprafata semi-spatiului, este tratata ca un proces de interactie. Prin aceasta modelare, centrul imprastietor devine o sursa de unde secundare.

Metoda are meritul de a introduce parametri de model ce pot fi folosiți pentru a reprezenta o mare varietate de centri imprastietori; ia in considerare distributii aleatoare, distributii localizate, precum si o distributie sub forma unui strat de grosime finita. Se poate face extensie la o succesiune de straturi de grosimi diferite si separate aleatoriu, precum si considerarea atit a spatiului infinit cit si semi-spatiului (modelat ca mediu de propagare cu neomogeneitati). Prin aceste cunostinte se doreste prevenirea autoritatilor si factorilor de decizie privind expunerea populatiei si a mediului construit la cutremure, atit la nivel national cat si local, **conform documentelor emise de programele europene Orizont 2020 - strategia GEOSS /GEM / EPOS-IP si cu strategia nationala pentru Competitivitate 2014-2020 (Axa prioritara 2) si cu Strategia de Dezvoltare Regionala 2014-2020 Bucuresti-Ilfov.**

In concluzie, se considera ca am introdus o metoda noua, bazata pe potentialele electromagnitice Kirchhoff, pentru estimarea efectelor unei densitati de neomogeneitati asupra propagarii undelor elastice in spatii isotrope. Am aplicat aceasta metoda atat unei spatiu infinit cat si unui semi-spatiu. Pentru un spatiu infinit densitatea de neomogeneitati renormeaza viteza undelor transversale si longitudinale. Am estimat acest efect atat pentru o neomogeneitate extinsa cat si pentru una localizata, sau pentru un strat, considerand ca marimea neomogeneitatii este mica (parametrul g). Pentru un semi-spatiu infinit metoda conduce la ecuatii integrale cuplate care au fost rezolvate si se arata ca astfel de neomogenitati pot renorma viteza undelor seismice, sau pot produce unde dispersive, in functie de geometria mediului si de extinderea spatiala a neomogenitatilor, acestea fiind elemente ce se pot detecta experimental. Ele sporesc informarea (cunoasterea) noastra privind aspectele practice ale seismelor.

Undele transversale s sunt afectate in acelasi mod ca si pentru spatiul infinit, iar acest lucru ramane valabil pentru toate undele in cazul neomogeneitatii extinse, cum era de asteptat. Pentru o neomogeneitate localizata undele transversale p sunt afectate in cel de-al doilea ordin de marime al parametrului g, in timp ce undele longitudinale suporta o renormare a vitezei (diferita de cea din cazul unui spatiu infinit). In plus, pentru un strat neomogen, undele longitudinale devin dispersive. De asemenea se estimeaza efectul unei neomogenitati de densitate statica, localizata sau extinsa.

Metoda prezentata aici poate fi extinsa la alte tipuri de neomogeneitati, cum sunt, de exemplu, cele ce apar in proprietatile elastice ale mediului (in coeficientii Lame), insa aceasta problema va fi studiata in cercetarile viitoare.

Propuneri pentru continuarea proiectului: Deoarece, în această etapă, **obiectivul a fost indeplinit integral** iar **rezultatele obtinute sint in concordanta cu tintele propuse** venind in sprijinul implementarii proiectului, propunem continuarea executiei proiectului in etapa urmatoare.

Indicatori : O parte din rezultate acestei etape au fost publicate in patru lucrari stiintifice:
1) Apostol, B. F., *Elastic equilibrium of the half-space revisited. Mindlin and Boussinesq problems*, Journal of Elasticity, Vol. **125**, No. 2, 139-148, 2016.
2) Apostol, B. F., *Elastic Displacement in a Half-Space Under the Action of a Tensor Force. General Solution for the Half-Space with Point Forces,* J. Elast., Vol. **126**, No. 2, 231-244, 2017.
3) Bratosin, D., Apostol, B. F., Balan, S. F., *Avoidance strategy for soil-structure resonance by considering nonlinear behavior of the site materials*, Rom. Journ. Phys., in press, 2017.
4) Apostol, B. F., *Elastic waves inside and on the surface of a half-space*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, in press.

iar alta parte vor fi prezentate la conferintele stiintifice internationale:
1) « 17th International Multidisciplinary Scientific GeoConferences SGEM 2016; Sciences and technologies in Geology, Exploration and mining, Section: Applied and Environmental Geophysics; Albena, Bulgaria”, cu titlul PRACTICAL CONSEQUENCES OF THE SITE NATURAL PERIOD EVALUATION IN NONLINEAR REGIME, autori Dinu Bratosin, Stefan Florin Balan si Dr. Bogdan Felix Apostol;
2) “17th International Multidisciplinary Scientific GeoConferences SGEM 2016; Sciences and technologies in Geology, Exploration and mining, Section: Applied and Environmental Geophysics; Albena, Bulgaria”, cu titlul Limits and Applicability in Seismic Base Isolation of the Structures in Romania, autori Dinu Bratosin, Stefan Florin Balan si Dr. Bogdan Felix Apostol;
3) „World Multidisciplinary Earth Science Symposium WMESS 2017, September 11-15, Prague, Czech Republic”, cu titlul Realistic features in analyzing the effect of the seismic motion upon localized structures considering aseismic devices influence on their dynamic behavior, autori Bogdan Felix Apostol, Stefan Florin Balan, Constantin Ionescu;
4) „World Multidisciplinary Earth Science Symposium WMESS 2017, September 11-15, Prague, Czech Republic”, cu titlul Brief overview of using nonlinear seismology in analysis

of the soil deposits effects on structure location, autori Bogdan Felix Apostol, Stefan Florin Balan, Constantin Ionescu;
5) „17th International Balkan Workshop on Applied Physics and Materials Science IBWAP 2017, July 11-14, Constanta, Romania”, cu titlul Practical insights on seismic risk evaluation from site-structure dynamic behavior perspective for Bucharest urban area, autori Bogdan Felix Apostol, Mircea Radulian, Constantin Ionescu, Stefan Florin Balan, Carmen Ortanza Cioflan;

si nationale:
1) “6-a Conf. Nat. de Inginerie Seismica si Seismologie din 14-17 iulie 2017”, cu titlul Site Studies for Seismic Risk Mitigation in Urban Areas, Bucuresti, Romania, autori: Dr. Ștefan Florin Bălan, Dr. Bogdan Felix Apostol.

Responsabil proiect

Dr. Apostol Bogdan Felix