RAPORT DE ACTIVITATE AL FAZEI

Contractul nr. 21N/2016
Proiectul: PN 16 35 01 07:Interactia undelor seismice (produse in focarele intermediare vrancene) cu suprafața și cu structurile de la suprafata si efectele lor asupra mediului construit
Faza: 1. Eficientizarea metodelor de analiza a solutiilor ecuatiei undelor elastice prin introducerea transformatei Fourier partiale, a functiilor generalizate (distributiilor) și a reprezentarii prin integrala Kirchhoff a solutiilor particulare ale ecuatiei undelor elastice
Termen: 15.04.2016

1. Obiectivul proiectului: Obiectivele principale urmarite sint evaluarea si cuantificarea efectelor seismice cu aplicabilitate la diferite amplasamente, modelarea propagarii undelor seismice prin structuri cu anumite caracteristici, in vederea introducerii lor ca input pentru proiectarea antiseismica.

2. Rezultate preconizate pentru atingerea obiectivului: evaluarea deplasarilor, vitezei și acceleratiei la sol, produse de undele seismice, atit în cazul omogen cit și în cazul structurilor (naturale sau artificiale), aceste date servind ca input în evaluarea riscului seismic. De asemeana isi propune sa gaseasca **care unde elastice vor fi simtite la suprafata pamantului, ce intensitate pot avea ele si ce distrugeri pot produce.**

3. Obiectivul fazei: Eficientizarea metodelor de analiza a solutiilor ecuatiei undelor elastice prin introducerea transformatei Fourier partiale (în raport cu variabilele paralele cu planul suprafetei), a functiilor generalizate (distributiilor) și a reprezentarii prin integrala Kirchhoff a solutiilor particulare ale ecuatiei undelor elastice

4. Rezultate preconizate pentru atingerea obiectivului fazei:
   Identificarea si caracterizarea undelor generate in solide semi-infinite de catre actiunea unor forte externe localizate in interiorul solidului – prin - adaptarea metodei transformatei Fourier la coordonatele paralele cu suprafata, reprezentarea solutiilor particulare ale ecuatiei undelor elastice prin integrale Kirchhoff și, în special, folosirea functiilor generalizate (distributiilor) în formularea problemei cu conditii la limite.

5. Rezumatul fazei:

1. Introducere. Se stie ca dintotdeauna propagarea undelor elastice, in corpuri cu geometrii speciale si restrictive, s-a bucurat de un continuu interes (B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, 1950; J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, 1973; E. G. Henneke, J. Acoust. Soc. Am., 1972; P. G. Richards and C. W. Frasier, Geophysics, 1976; R.-S. Wu, Phys. Rev. Lett., 1989; D.R. Jackson and A..N. Ivakin, J. Acoust. Soc. Am., 1998; W. Cai et al, Phys. Rev. Lett., 2000; S. K. Rathore et al, J. Nondestruct. Eval., 2003; W. M. Ewing et al, *Elastic Waves in Layered Media*, 1957 etc.). Problema a fost initial introdusa de Rayleigh si Lamb si a suferit mai multe dezvoltari in decursul timpului. Prezinta o anumita complexitate legata de dificultatile care apar in special din lipsa unui tratament adecvat a conditiilor la limita. Aceste dificultati cresc atunci trebuie determinate undele produse in astfel de solide elastice de catre fortele externe, fie localizate pe suprafata solidului, sau in interiorul sau, fie extinse intr-un anumit volum spatial. Mai interesant, dar si mai dificil este tratarea neomogenitatilor, localizate sau extinse, aflate in calea acestor unde ce se propaga in solide elastice. In afara de importanta lor practica in inginerie, aceste probleme sint relevante in studiul efectelor induse de undele seismice la suprafata Pamantului.

Propagarea undelor elastice in solidele izotrope este guvernata de binecunoscuta ecuatie Navier-Stokes. In absenta fortelor externe, a rezolva aceasta ecuatie (omogena) se reduce la o problema de moduri proprii. Pentru solidele cu geometrii restrictive, speciale, aceasta ecuatie de moduri proprii trebuie sa fie insotita de conditii de limita adecvate, care, in principiu, inseamna continuitatea fortei elastice (data de tensorul stress) la limita. Pentru un solid semi-infinit (semi-spatiu), de exemplu, cu o suprafata libera, componenta fortei elastice normala la suprafata trebuie sa dispara. In plus, conditiile la limita sint impuse la infinit, conducind, spre exemplu la propagarea undelor de suprafata (Rayleigh). Conditii la limita similare sint impuse, de exemplu, pentru un strat asezat peste un semi-spatiu elastic, conducind la unde Love. In acest fel obtinem modurile proprii (si frecventele proprii corespunzatoare), pe care le putem denumi "unde libere", in absenta unei forte externe. Fortele externe localizate sint de asemenea studiate considerindu-se "conditii la limita" care sa fie fi folosite in locul discontinuitatilor implicate de aceste forte, in locul unde aceste forte actioneaza. Aceasta metoda, folosita foarte mult de Lamb, este si astazi de actualitate. Putem spune ca solutia particulara obtinuta pentru ecuatia Navier-Stokes in acest fel da "undele fortate", adica unde generate de fortele externe. Solutia generala care consta intr-o superpozitie de "unde libere" si "fortate" trebuie sa indeplineasca conditiile la limita, tinind cont de geometria particulara a solidului. Putem vedea ca o astfel de abordare este destul de complicata iar aplicatiile ei la probleme de importanta practica destul de limitate. Mai multe metode aproximative, atât analitice cât si numerice, au fost dezvoltate pentru aceste probleme. Gradul de complexitate matematica creste semnificativ pentru distributii de forte externe sau in cazul prezentei neomogenitatilor si a defectelor. Prin urmare este explicabil si de inteles faptul ca s-a realizat putin progres in studiul acestor probleme de la lucrarile clasice ale lui Rayleigh, Lamb si Love pina acum.

Vom prezenta aici o noua metoda pentru studiul propagarii undelor in solide elastice isotrope cu structura finite (sau partial finita), bazata pe potentialele Kirchhoff din ecuatia undelor cu surse, imprumutata din electromagnetism. Noutatea in metoda noastra consta in considerarea termenului de compresiune din ecuatia Navier-Stokes drept termen sursa. Vom aplica aceasta metoda pentru a determina undele elastice produse intr-un solid semi-infinit (semi-spatiu) de catre o forta externa localizata fie pe suprafata solidului, fie in interiorul solidului. Pentru forta localizata pe suprafata se determina doua unde transversale ce se propaga in interiorul solidului, si una longitudinala ce apare ca mod propriu. Pentru forta localizata in interiorul solidului undele elastice sint unde stationare de-a lungul directiei perpendiculare pe suprafata. Se calculeaza deplasarea suprafetei in ambele cazuri precum si forta exercitata pe suprafata, produsa de o forta aflata in interiorul solidului. Toate aceste marimi prezinta o descrestere caracteristica si un comportament oscilator de-a lungul distantei in plan pe suprafata solidului. In ambele cazuri, metoda prezentata conduce la ecuatii integrale cuplate pentru amplitudinea undelor, pe care le rezolvam. Folosind metoda prezentata aici generalizam una din problemele propuse de Lamb (forta localizata pe suprafata) si aducem noi rezultate pentru cazul unei forte punctuale localizate in interiorul solidului. Generalizarea consta in tratarea unei distributii generale de forte cu o orientare generala actionind pe suprafata. Din cite cunoaste autorul pentru o forta localizata in interiorul solidului rezultatele prezentate aici sint noi. In final se va face o scurta discutie despre cum aceasta metoda poate fi extinsa pentru a include efectele neomogenitatilor aflate in calea propagarii undelor in solide elastice cu geometrii finite.

Undele elastice in solide isotrope sint guvernate de ecuatia de miscare Navier-Stokes:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}=\mu\Delta\mathbf{u}+(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{grad}\cdot\boldsymbol{div}\mathbf{u}+\rho\mathbf{f} \qquad (4.1)$$

in care ρ este densitatea, **u** este deplasarea, λ si μ sint coeficientii Lame iar **f** este o forta externa pe unitatea de masa. Prin transformarea Fourier a expresiei

$$\mathbf{u}(\mathbf{R},t)=\sum_{\mathbf{K}}\int d\omega\,\mathbf{u}(\mathbf{K},\omega)e^{i\mathbf{KR}-i\omega t} \qquad (4.2)$$

si o tranformare similiara pentru forta **f**, ecuatia (4.1) devine

$$(-\rho\omega^2+\mu K^2)\mathbf{u}=-(\lambda+\mu)(\mathbf{Ku})\mathbf{K}+\rho\mathbf{f} \qquad (4.3)$$

in care am renuntat la argumentele **K** si ω pentru simplificare. In ecuatiile (4.2.) si (4.3), precum si in toate cazurile ce urmeaza , juxtapunerea a doi vectori (cum ar fi **KR**, **Ku** etc.) inseamna produs scalar. Ecuatia (4.3) poate fi rezolvata simplu si solutia ei este data de:

$$\mathbf{u}=-\frac{(v_l^2-v_t^2)(\mathbf{Kf})}{(\omega^2-v_t^2K^2)(\omega^2-v_l^2K^2)}\mathbf{K}-\frac{\mathbf{f}}{\omega^2-v_t^2K^2} \qquad (4.4)$$

unde

$$v_l=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\,,\;\; v_t=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (4.5)$$

reprezinta vitezele undelor transversale si longitudinale. Se poate vedea din ecuatia (4.4) ca pentru o forta longitudinala **f**=f**K**/K cimpul deplasarii este longitudinal si are frecventele proprii $\omega=v_lK$, iar pentru o forta transversala **KF**=0 cimpul deplasarii este transversal si are frecventele proprii $\omega = v_t K$. Cum este bine stiut, coeficientii Lame pot fi exprimati prin modulul lui Young *E* si raportul Poisson *σ*,

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad (4.6)$$

si, din motive de stabilitate, *E*>0 si -1<*σ*<1/2 (de fapt, pentru solide obisnuite 0< *σ* <1/2). In particular, raportul

$$q = \frac{v_l^2}{v_t^2} - 1 = \frac{\lambda}{\mu} + 1 = \frac{\sigma}{1-2\sigma} \qquad (4.7)$$

Satisface inegalitatea *q*>1/3 (de fapt *q*>1). In general, solutia ecuatiei omogene (4.1) ("unde libere") trebuie adaugata solutiei particulare data de ecuatia (4.4) ("unde fortate").

Folosind aceste notatii putem scrie ecuatia (4.1) ca:

$$\frac{1}{v_t^2}\ddot{\mathbf{u}} - \Delta\mathbf{u} = \boldsymbol{q \cdot grad \cdot div}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}}{v_t^2} \qquad (4.8)$$

unde se poate recunoaste ecuatia undelor cu surse *q·grad·div***u** si $\mathbf{f}/v_t^2$. Dupa cum se stie, solutia sa este data de potentialul retardat (Kirchhoff)

$$\mathbf{u}(\mathbf{R},t) = \frac{q}{4\pi}\int d\mathbf{R}' \frac{grad \cdot div\mathbf{u}\left(\mathbf{R}', t - \frac{|R-R'|}{v_t}\right)}{|R-R'|} + \frac{1}{4\pi v_t^2}\int d\mathbf{R}' \frac{grad \cdot div\mathbf{f}\left(\mathbf{R}', t - \frac{|R-R'|}{v_t}\right)}{|R-R'|} \qquad (4.9)$$

Intr-adevar, folosind transformata Fourier data de ecuatia (4.2) si folosind de asemenea integrala cunoscuta

$$\int d\mathbf{R} \frac{1}{R} e^{i\mathbf{KR} - i\omega\frac{R}{v_t}} = -\frac{4\pi v_t^2}{\omega^2 - v_t^2 K^2} \qquad (4.10)$$

putem obtine usor solutia data de ecuatiile (4.3) si (4.4). Aplicam aici aceasta metoda a potentialelor Kirchhoff, inspirata din teoria electromagnetismului, undelor elastice generate intr-un solid semi-infinit de catre forte localizate in interiorul lui, urmand ca intr-o etapa viitoare sa folosim aceeasi tehnica si pentru fortele localizate pe suprafata pamatului.

2. Forta localizata in interiorul solidului (sub suprafata). Consideam forta de forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{R},t) = a^3\mathbf{f}(t)\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \qquad (4.35)$$

localizata la adancimea *d* sub suprafata plana *z*=0 a unui solid elastic semi-infinit extinzandu-se in regiunea *z*<0, astfel incat $\mathbf{R}_0$=(0,0,-*d*). Lungimea caracteristica *a* este mult mai mica decit distantele relevante. Este introdusa aici pentru motive de dimensionalitate dar si pentru a reprezenta spatial "focarului" (sursei) unde forta actioneaza. In ecuatia de mai sus vectorul de pozitie este dat de R=(x, y, z)=(**r**, z) iar *t* reprezinta timpul. Undele sferice produse de o astfel de forta punctuala care se propaga intr-un solid infinit sint cunoscute [18, see, for instance, Ben-Menahem, A., and Singh, J.D., *loc.cit.*]. Aici vom obtine undele produse de o astfel de sursa intr-un solid semi-infinit. Folosim un cimp al deplasarii

$$\mathbf{u} = (\mathbf{v}, u_3)\theta(-z) \qquad (4.36)$$

unde **v** este componenta in-plan (paralela cu suprafata) , u_3 este component transversala (perpendiculara pe suprafata) si θ(*z*)=0 pentru z<0, θ(*z*)=1 pentru z>0 este functia step. Folosim transformata Fourier in forma data de ecuatia

$\mathbf{v}(\mathbf{r},z;t) = \sum_{\mathbf{K}} \int d\omega \mathbf{v}(\mathbf{k},\omega;z) e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$ si una similara pentru $u_3(\mathbf{r}, z;t)$, unde **k** este vector in-plan. Introducem si un sistem de referinta definit de vectorii in plan **k**, $\mathbf{k}_\perp$ astfel incat $v_1 = \mathbf{vk}/k$, $v_2 = \mathbf{vk}_\perp/k$, si similar pentru **f** (mai exact pentru f_1 si f_2). Vectorul $\mathbf{k}_\perp$ este perpendicular pe **k**, $\mathbf{kk}_\perp$=0, si de aceeasi magnitudine k. Termenul forta, din ecuatiile de la paragraful anterior, pe care il notam **F** poate fi destul de usor evaluat. Transformata lui Fourier este data de

$$\mathbf{F} = -\frac{a^3\mathbf{f}}{2v_t^2\kappa} sin\kappa|z+d| \qquad (4.37)$$

unde $\kappa^2 = \omega^2/v_t^2 - k^2 \succ 0$ (ne limitam doar la undele ce se propaga). Aplicam aceeasi procedura si din ecuatia (4.9) obtinem in continuare

$$v_2 = F_2 = -\frac{a^3 f_2}{2v_t^2\kappa} sin\kappa|z+d| \qquad (4.38)$$

si un set de integrale cuplate

$$v_1 = -\frac{iqk^2}{2\kappa}\int^0 dz' v_1'(z') e^{i\kappa|z-z'|} - \frac{qk}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial z}\int^0 dz' u_3(z') e^{i\kappa|z-z'|} + F_1$$

$$u_3 = -\frac{qk}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial z}\int^0 dz' v_1'(z') e^{i\kappa|z-z'|} + \frac{iq}{2\kappa}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\int^0 dz' u_3(z') e^{i\kappa|z-z'|} + F_3 \qquad (4.39)$$

In obtinerea acestor ecuatii trebuie sa mentionam ca s-a folosit non-invertibilitatea derivatelor si integralelor, conform identitatii

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_0 dz' f(z') \frac{\partial}{\partial z'} e^{i\kappa|z-z'|} = \kappa^2 \int_0 dz' f(z') e^{i\kappa|z-z'|} - 2i\kappa f(z),$$

pentru orice functia $f(z)$, z>0; aceasta se datoreaza discontinuitatii derivatei functiei $e^{i\kappa|z-z'|}$ pentru $z=z'$. Din aceste ecuatii obtinem relatia

$$u_3 = -\frac{i}{k}\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{i}{k}\frac{\partial F_1}{\partial z} - F_3 \qquad (4.40)$$

Introducind u_3 din aceasta ecuatie in prima ecuatie din (4.39) si calculind integralele prin parti, obtinem o singura ecuatie integral

$$(1+q)v_1 = -\frac{iq\omega^2}{2v_t^2\kappa}\int^0 dz' v_1'(z') e^{i\kappa|z-z'|} + \frac{q}{2} v_1(0) e^{i\kappa z} + (1-q)F_1 -$$

$$\frac{iq\kappa}{2}\int^0 dz' F_1(z') e^{i\kappa|z-z'|} + \frac{q}{2} F_1(0) e^{-i\kappa z} + \frac{iqk}{2\kappa}\frac{\partial}{\partial z}\int^0 dz' F_3(z') e^{i\kappa|z-z'|} \qquad (4.41)$$

Derivind de doua ori in raport cu z obtinem

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \kappa'^2 v_1 = \frac{q}{1+q}\left(\kappa^2 F_1 + ik\frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \qquad (4.42)$$

unde $\kappa'^2 = \omega^2/v_l^2 - k^2$. Acum devine destul de usor sa gasim solutia pentru v_1. Este data de

$$v_1 = \frac{a^3}{2\omega^2}[\kappa f_1 sin\kappa|z+d| + ik sgn(z+d) cos\kappa(z+d)] \qquad (4.43)$$

si apoi din ecuatiile (4.37) si (4.40) obtinem

$$u_3 = \frac{a^3 k}{2\omega^2\kappa}[k f_3 sin\kappa|z+d| + i\kappa f_1 sgn(z+d) cos\kappa(z+d)] \qquad (4.44)$$

Se poate vedea ca toate aceste solutii $v_{1,2}$, u_3 sint unde stationare de-a lungul directiei perpendiculare pe suprafata, generate de o forta oscilatorie stationara data de ecuatia (4.37). In plus, ele sint si functii continue pentru $\kappa\rightarrow 0$, desi v_2 si u_3 pot creste nemarginit, $v_2(\kappa\rightarrow 0)$, $u_3(\kappa\rightarrow 0) \sim |z+d|$; aceasta crestere indica tranzitia catre regimul de damping (amortizare). Mai putem semnala in plus si discontinuitatea de la z= - d.

Interesant de observant este si faptul ca vectorii de unda **k** si **κ** in relatia ce da forta localizata sint variabile independente si reale. In afara de acestia, ecuatia undelor elastice selecteaza numai acei vectori de unda care satisfac conditia $\omega^2 = v_t^2(k^2+\kappa^2)$ si ii repartizeaza undelor corespunzatoare ce se propaga. Acesta este mecanismul matematic prin care undele elastice extinse sint generate de catre forte localizate. O alta observatie este aceea ca, undele descrise mai sus fiind stationare, polarizarea nu are sens pentru ele, desi sint asociate cu viteza undelor transversale v_t (intra in componenta relatiilor prin termenul κ). Pe de alta parte trebuie sa mentionam ca solutia ecuatiei omogene corespunzatoare lui (4.42) da undele longitudinale “libere“ caracterizate de vectorul de propagare κ', adica cu viteza v_l a undelor longitudinale, si, in mod similar, solutia ecuatiei omogene corespunzatoare ecuatiei (4.8) da undele transversale “libere” caracterizate de κ si v_t.

3. Deplasarea la suprafata. Deplasarea la suprafata (a solului) z=0 cauzata de undele “fortate” obtinute mai sus poate fi calculata folosind transformatele Fourier inverse pentru $v_{1,2}$(**K**) si u_3(**K**), cu **K**=(**k**, κ). Ca si in paragrafele anterioare, renuntam la argumentul ω pentru moment, pentru simplitate. Componentele Fourier pentru forta sint data de $\mathbf{f}(\mathbf{K}) = a^3\mathbf{f}e^{i\kappa d}$. Alegem un sistem de referinta in-plan cu o axa orientata de-a lungul razei in-plan **r** (axa radiala r) si cealalta perpendiculara pe prima (axa tangenta t). Notam cu α unghiul dintre vectorul forta **f** si raza **r** astfel incat vectorul forta poate fi scris $(f cos\alpha, f sin\alpha, f_3)$, unde f reprezinta forta in-plan (orizontala) iar f_3 pe cea verticala. De asemenea notam cu φ unghiul dintre vectorul de unda in-plan **k** si raza **r**, astfel incat avem $\mathbf{k} = k(\cos\varphi, \sin\varphi)$ si $\mathbf{k}_\perp = k(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Astfel putem calcula proiectiile fortei $f_{1,2,3}$ ce intra in ecuatiile (4.38), (4.43), (4.44). Ele sint date de
$\mathbf{f} = (f cos(\alpha-\varphi), f sin(\alpha-\varphi), f_3)$. Trebuie semnalat ca la trecerea $\rightarrow -\mathbf{k}$, adica cind $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$, cantitatile $f_{1,2}$ isi schimba semnul; in mod similar, f_3, fiind proiectia fortei de-a lungul componentei vectorului de unda κ, trebuie sa isi schimbe semnul la trecerea $\kappa \rightarrow -\kappa$.
Deplasarea dupa directia in plan in acest sistem de referinta este obtinuta din $\mathbf{v}(\mathrm{K}) = v_1\mathbf{k}/k + v_2\mathbf{k}_\perp/k$,cu cele doua componente radiala si tangentiala, v_r(**K**) si v_t(**K**). Trebuie de asemenea precizat ca pentru o valoare reala a deplasarii transformatele Fourier trebuie sa satisfaca relatiile de simetrie $\mathbf{v}^*(-\mathbf{K}) = \mathbf{v}(\mathbf{K})$, si similar $u_3^*(-\mathbf{K}) = u_3(\mathbf{K})$. Tinand cont de schimbarea semnului componentelor fortei ca urmare a acestei operatii, trebuie introdus un factor $sgn(\pi-\varphi)$ acolo unde este necesar pentru a obtine deplasarile reale. Integralele dupa unghiul φ in transformatele Fourier implica folosirea functiilor Bessel $J_{0,1}$. Deplasarea la suprafata poate fi scrisa ca:

$$\begin{aligned} v_r(\mathbf{r}) &= \frac{a^3 f}{4\pi\omega^2}\left(I_1 - \frac{1}{r}I_2\right) cos\alpha - \frac{a^3 f}{4\pi v_t^2 r} I_3 cos\alpha - \frac{a^3 f_3}{4\pi\omega^2} I_4 \\ v_t(\mathbf{r}) &= \frac{a^3 f}{4\pi\omega^2 r} I_2 sin\alpha - \frac{a^3 f}{4\pi v_t^2}\left(I_5 - \frac{1}{r}I_3\right) sin\alpha \\ u(\mathbf{r}) &= \frac{a^3 f_3}{4\pi\omega^2} I_6 - \frac{a^3 f}{4\pi\omega^2} I_4 cos\alpha \end{aligned} \qquad (4.45)$$

unde

$$I_1 = \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk\kappa k sin\kappa d \cdot J_0(kr), \quad I_2 = \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk\kappa k sin\kappa d \cdot J_1(kr),$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk \frac{1}{\kappa} sin\kappa d \cdot J_1(kr), \quad I_1 = \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk k^2 cos\kappa d \cdot J_1(kr) \qquad (4.46)$$

$$I_5 = \int_0^{\omega/v_t} dk \frac{k}{\kappa} sin\kappa d \cdot J_0(kr), \quad I_6 = \int_0^{\omega/v_t} dk \frac{k^3}{\kappa} sin\kappa d \cdot J_0(kr)$$

Vom estima aceste integrale in limita oscilatiilor rapide $\omega r / v_t, \omega d / v_t \succ\succ 1$. In acest caz principala contributie vine de la *k*~0 si se extinde pe $\Delta k \sim 1/r$ pentru *r>>d* sau pe $\Delta k \sim 1/d$ pentru *d>>r*. Vom avea contributiile principale, pentru *r>>d*:

$$v_r(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2} cos\alpha, \quad v_t(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2} sin\alpha, \quad u_3(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f}{\omega^2 r^3} cos\alpha \qquad (4.47)$$

unde factorii oscilatorii ai formelor $\sin \omega d / v_t$, $\cos \omega d / v_t$ nu sint considerati. Putem vedea caracterul directional al deplasarii la suprafata (cu unghiul α) si componenta verticala (u_3) este mult mai mica (cu un factor $\omega r / v_t$) decit componentele orizontale. Vom vedea cum caracterul directional asa cum este dat in ecuatiile (4.47) pentru undele “fortate” este corectat de contributia undelor “libere”. De asemenea merita sa mai notam ca principala contributie la componenta verticala a deplasarii este cauzata de forta in plan *f*, si ca, in general, componenta verticala a fortei aduce o contributie slaba. Aceasta se datoreaza caracterului stationar al undelor de-a lungul directiei verticale.

In continuare sa consideram o forta derivata dintr-o presiune localizata *p*. Componentele fortei sint date atunci de $f_1 = ipk/\rho$, $f_2 = 0$ si $f_3 = (-ip\kappa/\rho)e^{i\kappa d}$. In calculul transformatelor Fourier ale deplasarii la suprafata trebuie sa luam iar in considerare relatiile de simetrie $\mathbf{v}^*(-\mathbf{K}) = \mathbf{v}(\mathbf{K}) = \mathbf{v}(\mathbf{K})$ si $\mathbf{u}_3^*(-\mathbf{K}) = \mathbf{u}_3(\mathbf{K})$. Obtinem

$$v_r(r) = \frac{a^3 p}{4\pi\omega^2\rho} \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk\kappa k^2 sin\kappa d(1 - cos\kappa d) \cdot J_1(kr),$$

$$v_t(r) = \frac{a^3 p}{2\pi^2 \omega^2 \rho r} \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk\kappa k cos^2\kappa d sin(kr), \qquad (4.48)$$

$$u_3(r) = \frac{a^3 p}{4\pi \omega^2 \rho} \int_0^{\frac{\omega}{v_t}} dk k^3 (sin^2\kappa d + cos\kappa d) \cdot J_0(kr)$$

In aceleasi limite $\omega r / v_t \succ\succ \omega d / v_t \succ\succ 1$ contributiile principale din deplasarile de mai sus sint date de

$$v_r(r),\ v_t(r) \sim \frac{a^3 p}{\omega v_t \rho r^3}, \quad u_3(r) \sim \frac{a^3 p}{\omega^2 \rho r^4} \qquad (4.49)$$

Putem vedea ca deplasarile produse de presiune scad rapid cu distanta in comparatie cu deplasarile cauzate de o forta (ec. 4.47).

Vom da in continuare relatiile pentru viteza si acceleratii la suprafata. Acestea se calculeaza in principiu prin derivarea in raport cu timpul a deplasarilor, insa intervin niste artificii de calcul. Pornim de la relatiile (4.47) si scriem intai deplasarea radiala in forma $v_r(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2} cos\alpha = \frac{1}{\omega} v_r^0$, apoi scriem transformata sa Fourier in forma $v_r(t) = \frac{v_r^0}{\pi} \int d\omega \frac{1}{\omega} sin\omega t$ in care am pastrat numai partea reala (cea imaginara este zero) dupa introducerea formei in functia de functiile trigonometrice. Punem conditiile $\frac{\omega r}{v_t}, \frac{\omega d}{v_t} \gg 1, r > d$ (adica frecventa mare si locul unde calculam este la distanta mare de epicentru) si obtinem $\dot{v}_r(t) = \frac{v_r^0}{\pi}\int_{v_t/r}^{\infty} d\omega\, cos\omega t = \frac{v_r^0}{\pi t} sin\frac{v_t t}{r}$ pentru viteza si $\ddot{v}_r(t) = -\frac{v_r^0}{\pi t^2} sin\frac{v_t t}{r} + \frac{v_r^0 v_t}{\pi r t} cos\frac{v_t t}{r}$ pentru acceleratie. La fel se procedeaza si pentru componenta v_t , in schimb pentru componenta u_3 care are ω^2 la numitor, obtinem valori ce tind la zero pentru viteza si acceleratie (ω^2 este foarte mare).

4. Forta exercitata pe suprafata. In continuare ne intereseaza cazul fortei exercitate pe suprafata z=0 de catre undele elastic "fortate" produse sub suprafata. Dupa cum se stie foarte bine, forta produsa de un cimp al deplasarii **u** pe unitatea de suprafata si cu normala **n** este data de (in notatiile noastre) $\rho f_i^s = \sigma_{ik} n_k$, unde $\sigma_{ik} = \lambda u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu u_{ik}$ este tensorul stress (tensiune) si $u_{ik} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$ este tensorul deformare. Folosind sistemul de referinta definit de **k**, $\mathbf{k}_\perp$ si κ gasim

$$f_1^S(\mathbf{k},\omega) = \frac{a^3 v_t^2 \kappa}{\omega^2}(\kappa f_1 cos\kappa d - ikf_3 sin\kappa d)$$
$$f_2^S(\mathbf{k},\omega) = -a^3 f_2 cos\kappa d \qquad (4.50)$$
$$f_3^S(\mathbf{k},\omega) = \frac{a^3 v_t^2 \kappa}{\omega^2}(kf_3 cos\kappa d - i\kappa f_1 sin\kappa d)$$

Observam ca dilatarea (componenta dilatationala) se anuleaza, $v_{11} + v_{22} + u_{33} = 0$ (aceasta proprietate ramine valabila si pentru forta localizata pe suprafata corpului), in acord cu faptul ca aceste solutii, date de ecuatiile (4.38), (4.43), (4.44) sint "construite" din unde transversale.
Calculam transformata Fourier inversa a acestor forte in raport cu vectorului de unda **k** conform procedurii descrise anterior pentru deplasarile la suprafata. Expresiile asimptotice (in limitele $\omega r/v_t \succ\succ \omega d/v_t \succ\succ 1$) sint date de

$$f_r^S(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f}{r^2} cos\alpha\ ,\ \ f_t^S(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f}{r^2} sin\alpha\ ,\ \ f_3^S(\mathbf{r}) \sim \frac{a^3 f v_t}{\omega r^3} cos\alpha \qquad (4.51)$$

si sint similare cu deplasarile suprafetei date de ecuatia (4.47) cu exceptia unui factor aditional ω.
In acelasi mod se poate calcula forta exercitata pe suprafata de o presiune localizata.

5. Solutia generala. Solutia generala a problemei se obtine adaugind la solutia particulara data de ecuatiile (4.38), (4.43) si (4.44) solutiile ecuatiilor omogene de miscare in forma $\frac{1}{v_t^2}\ddot{\mathbf{u}} - \Delta\mathbf{u} = q \cdot grad \cdot div\mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}}{v_t^2}$ si (4.42). Acestea sint date de undele transversale

$$\mathbf{u}_t = \left(A_1, A_2, -\frac{k}{\kappa}A_1\right)e^{i\kappa z} \qquad (4.90)$$

si longitudinale

$$\mathbf{u}_l = \left(B, 0, -\frac{\kappa'}{k}B\right)e^{i\kappa z} \qquad (4.91)$$

unde constantele $A_{1,2}$, B sint determinate din conditia ca forta totala la suprafata sa fie nula, conform ecuatiei $\sigma_{ij} n_j = 0$. Pe ecuatiile de mai sus se poate verifica conditia de

transversalitate $div\mathbf{u}_t = 0$ si conditia $curl\mathbf{u}_l = 0$ pentru undele longitudinale. Solutiile undelor libere date de ecuatiile (4.90) si (4.91) sint scrise in sistemul de referinta dat de **k**, $\mathbf{k}_\perp$ si *z*.
Calculam forta la suprafata $\rho f_i^{os} = \lambda u_{ll}^0 \delta_{i3} + 2\mu u_{i3}^0$, unde $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l$, si impunind conditia

$$f_i^{0s} + f_i^s = 0 \tag{4.92}$$

unde f_i^s , data de ecuatia (4.50), corespunde fortei la suprafata generata de solutia particulara ("unde fortate"). Se observa ca ecuatia de mai sus este valabila pentru orice punct de pe suprafata z=0, adica se multiplica printr-un factor $e^{i\mathbf{kr}}$ cu acelasi vector de unda in plan **k**. Deoarece avem aceeasi frecventa ω si pentru solutia particulara si pentru "undele libere", iar $\omega^2 = v_t^2(\kappa^2 + k^2)$, $\omega^2 = v_l^2(\kappa'^2 + k^2)$ in ambele cazuri, inseamna ca κ κ' sint aceleasi adica ele sint variabile reale care corespund fortelor externe localizate. Prin urmare "undele libere" sint unde de propagare. Undele "libere" de suprafata amortizate (adica undele cu κ, κ' pur imaginare) pot fi excitate de catre forte externe amortizate.
Conditia (4.92) conduce la

$$A_1 = -i\frac{a^3 f_2}{v_t^2 \kappa} \cos\kappa d \tag{4.93}$$

si la sistemul de ecuatii

$$\begin{aligned}(\kappa^2 - k^2)A_1 + 2\kappa\kappa' B &= \frac{a^3\kappa^2}{\omega^2}(kf_3 \sin\kappa d + i\kappa f_1 \cos\kappa d)\\ 2k^2 A_1 - (\kappa^2 - k^2)B &= -\frac{a^3 k^2}{\omega^2}(\kappa f_1 \sin\kappa d + ikf_3 \cos\kappa d)\end{aligned} \tag{4.94}$$

a carui solutie se poate scrie

$$\begin{aligned}A_1 &= -\frac{4\kappa\kappa' k^2}{\Delta} v_1 + \frac{2\kappa^3(\kappa^2 - k^2)}{k\Delta} u_3\\ B &= \frac{4\kappa^3 k}{\Delta} u_3 \frac{2k^2(\kappa^2 - k^2)}{\Delta} v_1\end{aligned} \tag{4.95}$$

unde $\Delta = (\kappa^2 - k^2)^2 + 4\kappa\kappa' k^2$. Mai putem nota ca $\Delta = 0$ pentru $\kappa \to i\kappa$ si $\kappa' \to i\kappa'$ da relatia de dispersie $\omega(k)$ pentru undele Rayleigh de suprafata.
Deplasarile la suprafata determinate de "undele libere" sint date de $v_1^0 = A_1 + B,\ v_2^0 = A_2\ si\ u_3^0 = -\frac{k}{\kappa}A_1 + \frac{\kappa'}{k}B$. Calculam transformarile Fourier inverse prin aceeasi procedura ca cea descrisa in sectiunea anterioara. Sub aceleasi conditii ca si cele impuse acolo obtinem comportamentul asimptotic

$$\begin{aligned}v_r^{tot}(\mathbf{r}) &\sim \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2}\cos\alpha\,,\quad \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2}\sin\\ v_t^{tot}(\mathbf{r}) &\sim \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2}\sin\alpha\,,\quad \frac{a^3 f}{\omega v_t r^2}\cos\alpha\\ v_3^{tot}(\mathbf{r}) &\sim \left(1 - \frac{v_t}{v_l}\right)\frac{a^3 f}{\omega^2 r^3}\cos\alpha\,,\qquad \frac{a^3 v_t f}{\omega^2 v_t r^3}\sin\alpha\end{aligned} \tag{4.96}$$

pentru deplasarea totala $\mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}$. Se poate observa ca "undele libere" nu schimba dependenta de *r* dar introduc un caracter sumplimentar directional. In plus, deplasarea verticala (componenta) este influentata de factori ce depind de v_t / v_l. O concluzie similara se desprinde (cu exceptia caracterului directional) si in cazul unei forte derivata din presiune.

6. Dependenta temporala. Deplasarile asimptotice la suprafata induse de o forta localizata in interiorul volumului contin factori in frecventa de forma $1/\omega, 1/\omega^2$ etc. In plus, pentru *d*<<*r*, contin factori oscilatorii de forma $\sin(\omega d/v_t), \cos(\omega d/v_t)$ (neinclusi in ecuatiile 4.96). In cazul *r*<<*d* acesti factori oscilatorii sint de forma $\sin(\omega r/v_t), \cos(\omega r/v_t)$, deci putem considera un comportament general de forma $\sin(\omega R/v_t), \cos(\omega R/v_t)$ unde *R* este o lungime legata de distanta dintre sursa si punctul de pe suprafata. In plus, undele libere contribuie si ele cind se propaga cu viteza v_l de-a lungul distantei *R*, in special pentru valori mici ale razei in plan *r*. In continuare, pentru dependenta temporala a deplasarii la suprafata va trebui sa estimam de exemplu integrale de forma:

$$I = \int_0^{\Delta\omega} d\omega \frac{\cos\omega\tau}{\omega} \tag{4.128}$$

unde $\tau \sim t - R/v$, iar *v* reprezinta o viteza in sens general iar $\Delta\omega$ este un interval de frecventa. Se poate vedea ca pentru valori mici ale lui τ integrala din ecuatia de mai sus este data aproximativ de $I \sim \ln(\Delta\omega\tau)$. Aceasta ne arata ca frontul de unda are o crestere brusca pentru τ=0, dupa cum era de asteptat.

6. <u>Rezultate, stadiul realizării obiectivului fazei, concluzii şi propuneri pentru continuarea proiectului</u> (se vor preciza stadiul de implementare a proiectului, gradul de indeplinire a obiectivului cu referire la tintele stabilite si indicatorii asociati pentru monitorizare si evaluare).

Prin rezultatele prezentate consideram ca **obiectivele fazei au fot indeplinite in totalitate** si ca **tintele stabilite au fost atinse iar proiectul a atins gradul de implementare scontat** pentru etapa intai.

Acest proiect isi propune sa ofere date si proceduri in ceea ce priveste evaluarea riscului pre-existent si reducerea sa, la cutremurele produse de surse seismice, atit superficiale cat si intermediare, sa dezvolte tehnici potrivite privind implementarea raspunsului efectiv la dezastre. Prin aceste cunostinte se doreste prevenirea autoritatilor si factorilor de decizie privind expunerea populatiei si a mediului construit la cutremure, atit la nivel national cat si local, **conform documentelor emise de programele europene Orizont 2020 - strategia GEOSS /GEM / EPOS-IP si cu strategia nationala pentru Competitivitate 2014-2020 (Axa prioritara 2) si cu Strategia de Dezvoltare Regionala 2014-2020 Bucuresti-Ilfov.**

In concluzie, putem spune ca am introdus aici o noua metoda de studiu a propagarii undelor elastice in corpuri (solide) izotrope, bazata pe potentialele Kirchhoff pentru ecuatia undelor cu surse, imprumutata din teoria electromagnetismului. Noutatea consta in considerarea termenului de compresie din ecuatia Navier-Stokes drept un termen sursa pentru ecuatia undelor. Metoda implica ecuatii cu integrale cuplate pentru amplitudinea undelor care sint rezolvate. Solutia generala, constand intr-o superpozitie de unde “libere” si “unde fortate” trebuie sa se supuna conditiilor la limita, care sint in functie de tipul geometriei corpului considerat.

Folosind aceasta metoda au fost determinate undele produse intr-un solid elastic semi-infinit de catre o forta externa localizata in interiorul solidului la o distanta (adancime) *d*. In acest caz undele sint stationare de-a lungul directiei perpendiculare pe suprafata corpului. De asemenea s-au calculat deplasarile la suprafata produse de aceste forte precum si forta exercitata pe suprafata dar produsa de o forta localizata in interior. De asemena au fost estimate aceste cantitati in regimul oscilatiilor rapide ($\omega r / v_t , \omega d / v_t \succ\succ 1$, unde ω reprezinta frecventa si v_t viteza undelor transversale) si pentru distanta in plan *r* mult mai mari decit adancimea *d*. Aceste cantitati prezinta o descrestere caracteristica cu distanta in plan pe suprafata solidului si un caracter oscilatoriu caracteristic. Ne-am limitat la solutiile particulare produse de forte cu sursa localizata, in acelasi timp fiind interesati in special de efectele produse de astfel de forte intr-un solid elastic semi-infinit. Folosind aceasta metoda s-a generalizat una din problemele lui Lamb (forta localizata pe suprafata unui solid) si s-au obtinut noi rezultate pentru cazul unei forte punctuale localizate in interiorul solidului. Multe alte rezultate pot fi obtinute folosind aceasta metoda pentru diferite geometrii si distributii de forte, acestea putand a fi tratate in studiile viitoare.
Ca atare aceasta metoda poate fi extinsa la determinarea propagarii undelor in corpuri solide elastice cu geometrii speciale si finite, fie ca moduri proprii fie cauzate de forte externe (fie localizate sau extinse).

Propuneri pentru continuarea proiectului: Deoarece, în această etapă, **obiectivul a fost indeplinit integral** iar **rezultatele obtinute sint in concordanta cu tintele propuse** venind in sprijinul implementarii proiectului, propunem continuarea executiei proiectului in etapa a doua cu posibilitati de extindere si pentru o etapa suplimentara.

Indicatori : O parte din rezultate acestei etape au fost publicate intr-o lucrare stiintifica cu titlul ELASTIC WAVES EQUATION WITH LOCALIZED SOURCES IN ISOTROPIC HALF-SPACE, autor B. F. APOSTOL, ce va aparea anul acesta in revista *Romanian Journal of Physics*,
iar alta parte vor fi prezentate la conferintele stiintifice internationale:
« 16th International Multidisciplinary Scientific GeoConferences SGEM 2016; Sciences and technologies in Geology, Exploration and mining, Section: Applied and Environmental Geophysics; Albena, Bulgaria”, cu titlul THE NECESSITY OF CONSIDERING NONLINEAR SEISMOLOGY IN SITE EVALUATION, autori Dr. Stefan Florin Balan si Dr. Bogdan Felix Apostol,
si „International Conference on Urban Risk” ICUR 2016, Lisabona, Portugalia, cu titlul „Reinforced concrete buildings behaviour in the Metropolis of Bucharest during Romanian strong earthquakes”, autori Stefan Florin BALAN, Dragos TOMA-DANILA, Bogdan Felix APOSTOL.

Responsabil proiect

Dr. Apostol Bogdan Felix